Matematická analýza NOFY151, ZS 24/25, Cvičení s L. Krumpem

Domácí úkol č. 4 – Řešení

V úlohách 1–3 spočtěte primitivní funkci na maximálních intervalech, kde existuje, a určete tyto intervaly.

1. (1 bod)

$$\int \frac{2\sin x - \cos x}{3\sin^2 x + 4\cos^2 x} dx$$

Tento integrand lze napsat jako součet dvou funkcí tak, aby pro každou z nich šlo použít jednoduchou substituci $\cos x$ nebo $\sin x$:

$$\begin{aligned}\int \frac{2\sin x - \cos x}{3\sin^2 x + 4\cos^2 x} dx &= \int \frac{2\sin x}{3(1-\cos^2 x) + 4\cos^2 x} dx - \int \frac{\cos x}{3\sin^2 x + 4(1-\sin^2 x)} dx = \\ &= \int \frac{2\sin x}{3+\cos^2 x} dx - \int \frac{\cos x}{4-\sin^2 x} dx = F_1(x) - F_2(x)\end{aligned}$$

Pak u $F_1(x)$ použijeme substituci $[y = \cos x, dy = -\sin x dx]$, takže

$$\int \frac{-2dy}{y^2+3} = (-2)\int \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}dy}{\sqrt{3}((\frac{y}{\sqrt{3}})^2+1)} = -\frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{y}{\sqrt{3}},$$

$$F_1(x) = -\frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{\cos x}{\sqrt{3}}.$$

U $F_2(x)$ použijeme substituci $[y = \sin x, dy = \cos x dx]$, takže

$$\int \frac{dy}{4-y^2} = \frac{1}{4}\int \left(\frac{1}{y+2} - \frac{1}{y-2}\right) dy = \frac{1}{4} \ln\left|\frac{y+2}{y-2}\right|,$$

$$F_2(x) = \frac{1}{4} \ln\left|\frac{\sin x + 2}{\sin x - 2}\right|,$$

a celkově

$$\boxed{F(x) = -\frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{\cos x}{\sqrt{3}} - \frac{1}{4} \ln\left|\frac{\sin x + 2}{\sin x - 2}\right|} + C.$$

Druhou možností pro výpočet $F_2(x)$ je použití $\int \frac{dy}{1-y^2} = \operatorname{argtgh} y$ takto:

$$\int \frac{\cos x}{4-\sin^2 x} dx = \int \frac{2\frac{\cos x}{2}}{4(1-\left(\frac{\sin x}{2}\right)^2)} dx = \frac{1}{2} \operatorname{argtgh}\left(\frac{\sin x}{2}\right),$$

což je ovšem díky převodním vztahům pro hyperbolometrické funkce totéž jako $F_2(x)$ v původním tvaru.

Integrand i primitivní funkce jsou spojité na $\mathbb{R}$.

Kdo si nevšiml této možnosti rozložení na dva integrály, musel použít pracnější substituci $y = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$, která vede na výsledný tvar (uvádím jej už bez výpočtu)

$$G(x) = \frac{1}{4} \ln \frac{\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} - \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1}{\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} + \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1} + \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\operatorname{arctg} \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} - 1}{\sqrt{3}} - \operatorname{arctg} \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1}{\sqrt{3}} \right) + C',$$

který není definovaný v bodech tvaru $(2k+1)\pi$. V těchto bodech je ovšem oboustraná limita rovna nule, takže při lepení nemusíme posouvat o žádnou konstantu a pouze v těchto bodech dodefinujeme primitivní funkci nulou. To nám napovídá, že substituce $y = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ byla zbytečná. Porovnáním těchto dvou výsledků, dosažených různými metodami, také vidíme, že výslednou primitivní funkci můžeme dostat v dosti odlišných tvarech, které se na první pohled příliš nepodobají. Je dobré si uvědomit, že obě funkce F i G jsou primitivní ke stejné funkci na stejném intervalu ($\mathbb{R}$) a tudíž se musejí lišit jen o konstantu, která však nemusí být nulová. Snadno ji určíme dosazením některého bodu, např. nuly, do obou funkcí:

$$F(0) = -\frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad G(0) = -\frac{4}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{3}},$$

takže

$$F(x) = G(x) + \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

2. (1 bod)

$$\int \frac{1}{x} \sqrt{\frac{2-x}{x-3}} dx$$

Volíme substituci $\left[y = \sqrt{\frac{2-x}{x-3}}, dy = \sqrt{\frac{x-3}{2-x}} \frac{dx}{2(x-3)^2} \right]$, spočteme $\left[x = \frac{3y^2+2}{y^2+1}, dx = \frac{2y}{(y^2+1)^2} dy \right]$. Integrál se tedy převádí na

$$\int \frac{y^2+1}{3y^2+2} \cdot y \cdot \frac{2y}{(y^2+1)^2} dy = \int \frac{2y^2}{(y^2+1)(3y^2+2)} dy,$$

což snadno rozložíme na parciální zlomky: sice nelze použít zakrývací metodu a musíme tedy porovnávat koeficienty, ale jelikož jsou všude jen sudé mocniny y, je jasné, že v čitatelích budou jen konstantní členy, konkrétně vyjde 2 a -4. Tedy integrujeme

$$\int \frac{2}{x^2+1} dy - \int \frac{4}{3y^2+2} dy = 2 \operatorname{arctg} y - 2 \int \frac{1}{\frac{3}{2} y^2 + 1} dy = 2 \operatorname{arctg} y - \frac{4}{\sqrt{6}} \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{3}{2}} y \right)$$

a tedy

$$\boxed{F(x) = 2 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{2-x}{x-3}} - \frac{4}{\sqrt{6}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{3(2-x)}{2(x-3)}}} + C$$

Integrand i primitivní funkce jsou spojité v intervalu $(2, 3)$.

3. (1 bod)

$$\int \frac{dx}{3\cos x + 2\sin x + 5}$$

Použijeme jedinou možnou substituci $y = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$, pro niž je

$$dy = \frac{dx}{2\cos^2\frac{x}{2}},\ \cos^2\frac{x}{2} = \frac{1}{1+y^2},\ \cos x = \frac{1-y^2}{1+y^2},\ \sin x = \frac{2y}{1+y^2},$$

výraz upravíme na

$$\int \frac{2\cos^2\frac{x}{2}}{3\cos x + 2\sin x + 5} \cdot \frac{dx}{2\cos^2\frac{x}{2}}$$

což po substituci a několika snadných úpravách vede na integrál

$$\int \frac{\frac{2}{1+y^2}}{3\frac{1-y^2}{1+y^2} + 2\frac{2y}{1+y^2} + 5} = \int \frac{dy}{y^2+2y+4}.$$

Výraz ve jmenovateli nemá reálný kořen, takže pomocí doplnění na čtverec jej převedeme na

$$\int \frac{\frac{dy}{\sqrt{3}}}{\sqrt{3}\left(\left(\frac{y+1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1\right)} = \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}\frac{y+1}{\sqrt{3}},$$

takže dostáváme primitivní funkci

$$I(x) = \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}{\sqrt{3}} + c.$$

Ovšem tato funkce není definovaná v bodech tvaru $\pi + 2k\pi$, zatímco původní funkce je definovaná a spojitá v celém $\mathbb{R}$ (zkontrolujte, že jmenovatel se nikdy nerovná nule!), proto má primitivní funkci také v celém $\mathbb{R}$, takže musíme lepit. Snadno spočteme jednostranné limity

$$\lim_{x\to(\pi+2k\pi)\mp} I(x) = \lim_{x\to\pi\mp} I(x) = \pm\frac{\pi}{2\sqrt{3}},$$

takže klademe

$$F(x) \ := \ \boxed{\frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}{\sqrt{3}} + \frac{k\pi}{\sqrt{3}} \text{ pro } x \in (-\pi+2k\pi, \pi+2k\pi)}$$

$$F(x) \ := \ \boxed{\frac{\pi}{2\sqrt{3}} + \frac{k\pi}{\sqrt{3}} \text{ pro } x = \pi + 2k\pi}$$

a výsledkem integrace je tedy $F(x) + C$, spojitá v celém $\mathbb{R}$.

4. (1 bod) Spočtěte limitu

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\operatorname{tg}^2 x}$$

a vše řádně zdůvodněte.

Jedná se o limitu ve tvaru exponenciály, typu „1^∞", takže píšeme

$$L = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\operatorname{tg}^2 x} = e^K,\ K = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg}^2 x \ln(\sin x),$$

což je limita typu $\infty \cdot 0$. Převedeme ji na podíl, abychom mohli použít L'Hospitalovo pravidlo:

$$K = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(\sin x)}{(\operatorname{tg}^2 x)^{-1}} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(\sin x)}{\operatorname{cotg}^2 x}.$$

Snadno zjistíme, že se jedná o limitu typu $\frac{0}{0}$ (limita čitatele i jmenovatele je zřejmě 0), proto můžeme aplikovat L'Hospitala:

$$K = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{2\operatorname{cotg} x \frac{-1}{\sin^2 x}} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{-\sin^2 x}{2} = \frac{-1}{2},$$

čili tato limita existuje a proto existuje i limita K a je rovna téže hodnotě. Závěrem

$$\boxed{L = e^{-\frac{1}{2}}}$$

Lukáš Krump, 18.12.2024