Matematická analýza NOFY151, ZS 24/25, Cvičení s L. Krumpem

Domácí úkol č. 3 – Řešení

V úlohách 1 a 2 spočtěte primitivní funkci a proveďte kontrolu výsledku derivováním.

1. (0,5 bodu)

$$\int x^2 \cos 2x dx$$

Použijeme metodu per partes: v prvním kroku položíme $f(x) = x^2, f'(x) = 2x, g'(x) = \cos 2x$ a snadno si uvědomíme, že pak musí být $g(x) = \frac{1}{2}\sin 2x$. Proto

$$F(x) = \int x^2 \cos 2x dx = \frac{1}{2}x^2 \sin 2x - \int 2x\frac{1}{2}\sin 2x dx = \frac{1}{2}x^2 \sin 2x - \int x \sin 2x dx.$$

Zde použijeme per partes podruhé, nyní klademe $f(x) = x, f'(x) = 1, g'(x) = \sin 2x$ a dopočteme $g(x) = -\frac{1}{2}\cos 2x$, takže

$$F(x) = \frac{1}{2}x^2 \sin 2x - \left(-\frac{1}{2}x \cos 2x + \int \frac{1}{2}\cos 2x dx\right)$$

Jelikož poslední uvedená primitivní funkce je $\frac{1}{4}\sin 2x$, máme nakonec

$$\boxed{F(x) = \frac{1}{2}x^2 \sin 2x + \frac{1}{2}x \cos 2x - \frac{1}{4}\sin 2x} + C$$

Derivováním provedeme kontrolu:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{2}x^2 \sin 2x + \frac{1}{2}x \cos 2x - \frac{1}{4}\sin 2x\right)' = \\ = \quad & \frac{1}{2}(2x \sin 2x + x^2 \cdot 2\cos 2x) + \frac{1}{2}(\cos 2x - x \cdot 2 \sin 2x) - \frac{1}{4}2\cos 2x = x^2 \cos 2x \end{aligned}$$

2. (0,5 bodu)

$$\int \cos^5 x dx$$

Integrál přepíšeme do tvaru

$$\int \cos^5 x dx = \int (\cos^2 x)^2 \cos x dx = \int (1-\sin^2 x)^2 \cos x dx = \int (1-2\sin^2 x+\sin^4 x)\cos x dx$$

Vidíme, že funkce v závorce je „polynom v sinu“ a ta je vynásobená derivací sinu, takže zřejmě lze použít první substituci $y = \sin x, dy = \cos x dx$. Pak tedy integrujeme

$$\int 1 - 2y^2 + y^4 dy = y - \frac{2}{3}y^3 + \frac{1}{5}y^5$$

a zpětnou substitucí dostáváme

$$\boxed{F(x) = \sin x - \frac{2}{3}\sin^3 x + \frac{1}{5}\sin^5 x} + C$$

Derivováním provedeme kontrolu:

$$\begin{aligned}
&\left(\sin x - \frac{2}{3}\sin^3 x + \frac{1}{5}\sin^5 x\right)' = \cos x - 2\sin^2 x\cos x + \sin^4 x\cos x = \\
= \quad &(1 - 2\sin^2 x + \sin^4 x)\cos x = \cos^5 x
\end{aligned}$$

V úlohách 3–5 spočtěte primitivní funkci na maximálních intervalech, kde existuje, a určete tyto intervaly.

3. (1 bod)

$$\int \frac{x}{x^3 - 1} dx$$

Pro jmenovatel platí $x^3 - 1 = (x-1)(x^2+x+1)$ a zlomek snadno rozložíme na $\frac{1}{3}(\frac{1}{x-1} - \frac{x-1}{x^2+x+1})$. Integrál z prvního zlomku v závorce je $\ln|x-1|$ a integrál z druhého zlomku nejprve rozložíme na součet

$$\frac{1}{2}\int \frac{2x+1}{x^2+x+1} dx - \frac{3}{2}\int \frac{1}{x^2+x+1} dx,$$

z čehož první integrál je roven $\frac{1}{2}\ln(x^2+x+1)$ a druhý upravíme:

$$\frac{3}{2}\int \frac{1}{x^2+x+1} dx = \frac{3}{2}\int \frac{1}{(x+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} dx = \frac{3}{2}\int \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\frac{2}{\sqrt{3}} dx}{(\frac{2x+1}{\sqrt{3}})^2 + 1},$$

což je při použití substituce $\left[y = \frac{2x+1}{\sqrt{3}}, dy = \frac{2}{\sqrt{3}} dx\right]$ rovno $\sqrt{3}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2x+1}{\sqrt{3}}$. Celkově tedy

$$\begin{aligned}
F(x) &= \frac{1}{3}\left(\ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln(x^2+x+1) + \sqrt{3}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) = \\
&= \boxed{\frac{1}{6}\ln\frac{(x-1)^2}{x^2+x+1} + \frac{1}{\sqrt{3}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2x+1}{\sqrt{3}}} + C.
\end{aligned}$$

Integrand i primitivní funkce jsou spojité na $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$.

4. (1 bod)

$$\int \frac{dx}{x + \sqrt{x} + 2}$$

Definiční obor zadané funkce je $\langle 0, \infty)$, pro účely integrování jej upravíme na $(0, \infty)$. Volíme substituci $y = \sqrt{x}$, kterou lze zapsat i ve tvaru druhé substituce $x = y^2$. Přitom

$y \in (0, \infty)$ a v tomto intervalu má substituční funkce y^2 nenulovou derivaci, tedy skutečně můžeme použít druhou substituci s $dx = 2ydy$. Integrujeme tedy výraz s nerozložitelným jmenovatelem

$$\int \frac{2y}{y^2+y+2}dy = \int \frac{2y+1}{y^2+y+2}dy - \int \frac{1}{y^2+y+2}dy = \ln(y^2+y+2) - \frac{2}{\sqrt{7}} \operatorname{arctg}\left(\frac{2y+1}{\sqrt{7}}\right)$$

přičemž postup nalezení posledního integrálu vynecháváme, je to podobné jako v předchozí úloze.

Zpětným dosazením pak dostáváme

$$\boxed{F(x) = \ln(x+\sqrt{x}+2) - \frac{2}{\sqrt{7}} \operatorname{arctg}\left(\frac{2\sqrt{x}+1}{\sqrt{7}}\right)} + C$$

a tato funkce má také definiční obor $(0, \infty)$.

5. (1 bod)

$$\int \frac{dx}{x(\ln^2 x + 2\ln x - 8)}$$

Očividně se hodí substituce $y = \ln x$, která úlohu převádí na integrál

$$\int \frac{1}{y^2+2y-8}dy,$$

který rozložíme na parciální zlomky a zintegrujeme

$$\int \frac{1}{6}\left(\frac{1}{y-2} - \frac{1}{y+4}\right)dy = \frac{1}{6}(\ln|y-2| - \ln|y+4|) = \frac{1}{6}\ln\left|\frac{y-2}{y+4}\right|$$

a po zpětném dosazení tedy

$$\boxed{F(x) = \frac{1}{6}\ln\left|\frac{\ln x - 2}{\ln x + 4}\right|} + C.$$

Jak je to ale s definičními obory? Pro integrand musí být jednak $x > 0$ a jednak $\ln x \notin \{2, -4\}$, dohromady tedy $x \in (0, e^{-4}) \cup (e^{-4}, e^2) \cup (e^2, \infty)$. Pro primitivní funkci platí zřejmě totéž.

Lukáš Krump, 10.12.2024