Matematická analýza NOFY151, ZS 24/25, Cvičení s L. Krumpem

Domácí úkol č. 2 – Řešení

V každé úloze spočtěte limitu, všechny kroky řádně zdůvodněte. Nepoužívejte zatím l'Hospitalovo pravidlo ani Taylorovy polynomy (pokud je už znáte), počítejte jen úpravami a s použitím „známých limit".

Pro úsporu místa značím vždy hledanou limitu písmenem L.

1. (1 bod)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x},\ n \in \mathbb{N}$$

Výraz šikovně rozšíříme, abychom mohli použít vzorec

$$a^n - 1 = (a-1)(a^{n-1} + \cdots + a + 1)) :$$

$$\begin{aligned} L &= \lim_{x\to 0} \frac{((1+x)^{\frac{1}{n}}-1)((1+x)^{\frac{n-1}{n}} + (1+x)^{\frac{n-2}{n}} + \cdots + (1+x)^{\frac{1}{n}} + 1)}{x((1+x)^{\frac{n-1}{n}} + (1+x)^{\frac{n-2}{n}} + \cdots + (1+x)^{\frac{1}{n}} + 1)} = \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{(1+x)-1}{x((1+x)^{\frac{n-1}{n}} + (1+x)^{\frac{n-2}{n}} + \cdots + (1+x)^{\frac{1}{n}} + 1)} = \boxed{\frac{1}{n}}, \end{aligned}$$

kde jsme v posledním kroku zkrátili x a do dlouhého výrazu dosadili $x=0$.

Tentýž postup se mohl zapsat také tak, že jste si zavedli substituci $y = \sqrt[n]{1+x}$ a pak jde o limitu

$$\lim_{y\to 1} \frac{y-1}{y^n-1} = \lim_{y\to 1} \frac{y-1}{(y-1)(y^{n-1}+\cdots+y+1)} = \frac{1}{n}.$$

Někteří jste také vymysleli alternativní způsob řešení pomocí známých limit s exponenciálou a logaritmem:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{\frac{\ln(1+x)}{n}}-1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{\frac{\ln(1+x)}{n}}-1}{\frac{\ln(1+x)}{n}} \cdot \frac{\ln(1+x)}{nx} = \frac{1}{n}$$

2. (1 bod)

$$\lim_{x\to e} \frac{\ln x - 1}{x-e}$$

$$L = \lim_{x\to e} \frac{\ln x - \ln e}{x-e} = \lim_{x\to e} \frac{\ln \frac{x}{e}}{e(\frac{x}{e}-1)} = \boxed{\frac{1}{e}},$$

kde jsme v posledním kroku využili větu o limitě součinu, větu o limitě složené funkce se substitucí $y = \frac{x}{e}$ a známou limitu $\lim_{y\to 1} \frac{\ln y}{y-1} = 1$.

3. (1 bod)

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{\operatorname{tg}^3 x - 3\operatorname{tg} x}{\cos(x+\frac{\pi}{6})}$$

Připomeňme nejprve, že $\sin\frac{\pi}{6} = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}, \sin\frac{\pi}{3} = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \operatorname{tg}\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$.

V prvním kroku vytkneme a upravíme goniometrické funkce v čitateli, ve druhém rozšíříme výrazem $\cos^2 x$

$$L = \lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \operatorname{tg} x \cdot \frac{\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - 3}{\cos(x+\frac{\pi}{6})} = \lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{\operatorname{tg} x}{\cos^2 x} \cdot \frac{\sin^2 x - 3\cos^2 x}{(\cos(x+\frac{\pi}{6}))}$$

Dále dosadíme $x = \frac{\pi}{3}$ do prvního podílu (věta o limitě součinu!), problém typu „$\frac{0}{0}$“ nám zůstává ve druhém podílu, takže jej musíme co nejvíce zjednodušit. Rozložíme jeho čitatel na součin a jmenovatel upravíme podle součtového vzorce:

$$\begin{aligned} L &= 4\sqrt{3} \lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{(\sin x - \sqrt{3}\cos x)(\sin x + \sqrt{3}\cos x)}{\cos x \cos\frac{\pi}{6} - \sin x \sin\frac{\pi}{6}} = \\ &= 4\sqrt{3} \lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{(\sin x - \sqrt{3}\cos x)}{\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x - \frac{1}{2}\sin x} \cdot (\sin x + \sqrt{3}\cos x) = \\ &= 4\sqrt{3} \cdot (-2)(\frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{3}\frac{1}{2}) = \boxed{-24}, \end{aligned}$$

přičemž v posledním kroku jsme vykrátili lomený výraz (vyšlo -2) a dosadili do poslední závorky.

4. (1 bod)

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{(2+x)^x + (3+x)^x}{2} \right)^{\frac{1}{x}}$$

Nejprve si limitu přepíšeme do tvaru exponenciály: $L = e^K$, kde

$$K = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \ln\left(\frac{(2+x)^x + (3+x)^x}{2} \right)$$

Nyní je vhodné si spočítat limitu výrazu ve velké závorce, abychom věděli, na čem jsme. Naštěstí výrazy tvaru $(a+x)^x$ mají (pro $a > 0$) bezproblémovou limitu

$$\lim_{x\to 0}(a+x)^x = \lim_{x\to 0} e^{x\ln(a+x)} = e^{\lim_{x\to 0} x\ln(a+x)} = e^{0\cdot\ln a} = 1,$$

neboť vše je zde spojité (nejedná se o typ „1^∞“). Proto i celý výraz ve velké závorce je spojitý a má limitu $\frac{1+1}{2} = 1$. Vidíme tedy, že situace vede na použití známé limity $\lim_{x\to 1} \frac{\ln y}{y-1} = 1$ při substituci $y = \frac{(2+x)^x+(3+x)^x}{2}$. Proto

$$\begin{aligned}
K &= \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \cdot \frac{\ln\left(\frac{(2+x)^x+(3+x)^x}{2}\right)}{\frac{(2+x)^x+(3+x)^x}{2} - 1} \cdot \left(\frac{(2+x)^x + (3+x)^x}{2} - 1\right) = \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \cdot \left(\frac{(2+x)^x + (3+x)^x}{2} - 1\right) = \\
&= \frac{1}{2}\left(\lim_{x\to 0} \frac{(2+x)^x - 1}{x} + \lim_{x\to 0} \frac{(3+x)^x - 1}{x}\right) = \frac{1}{2}(J_2 + J_3)
\end{aligned}$$

kde v posledním kroku jsme si celý výraz rozdělili na součet dvou podobných výrazů. Dále můžeme spočítat limitu J_a každého takového zlomku s obecným číslem $a > 0$ místo dvojky a trojky:

$$J_a = \lim_{x\to 0} \frac{(a+x)^x - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{x\ln(a+x)} - 1}{x}$$

a protože $\lim_{x\to 0} x\ln(a+x) = 0$, použijeme známou limitu $\lim_{y\to 0} \frac{e^y-1}{y} = 1$ a substituci $y = x\ln(a+x)$, takže

$$J_a = \lim_{x\to 0} \frac{e^{x\ln(a+x)} - 1}{x\ln(a+x)} \cdot \ln(a+x) = \ln a.$$

Na závěr už jen vše dosadíme a máme

$$\begin{aligned}
K &= \frac{1}{2}(\ln 2 + \ln 3) = \frac{1}{2}\ln 6 = \ln\sqrt{6} \\
L &= \boxed{\sqrt{6}}
\end{aligned}$$

A je to.

Lukáš Krump, 6.11.2024