Matematická analýza NOFY151, ZS 24/25, Cvičení s L. Krumpem

Domácí úkol č. 1 – řešení.

1. K danému výroku zapište jeho negaci. Rozhodněte, zda platí původní výrok nebo jeho negace, zdůvodněte.

a. (0,5 bodu)

$$\exists c \in \langle -2, 2\rangle \ \exists d \in \langle -2, 2\rangle : c \neq d \wedge c^2 = d^2$$

Negace:

$$\forall c \in \langle -2, 2\rangle \ \forall d \in \langle -2, 2\rangle : c = d \vee c^2 \neq d^2$$

Platí původní výrok, stačí vzít třeba $c = 1, d = -1$.

b. (0,5 bodu)

$$\forall x \in \mathbb{R} \ \exists a \in \mathbb{Z} \ \exists b \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) : x = a + b$$

Negace:

$$\exists x \in \mathbb{R} \ \forall a \in \mathbb{Z} \ \forall b \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) : x \neq a + b$$

Platí negace původního výroku, stačí vzít třeba $x = \frac{1}{2}$ (nebo kterékoli jiné číslo s desetinnou částí rovnou jedné polovině), takové pak nelze napsat v požadovaném tvaru.

2. Dokažte množinové rovnosti ($A, B, \ldots$ značí množiny).

a. (0,5 bodu)

$$(A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus (B \cap C)$$

Někteří z vás to dokazovali obrázkem – množinovým diagramem, nebo také výčtem případů. Bral jsem to vše jako správné řešení. Jinak lze psát:

$$(A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus B = (A \cap C) \setminus (B \cap C),$$

přičemž poslední rovnost platí díky tomu, že množina $(A \cap C)$ je podmnožinou množiny C, takže je jedno, zda od ní odebíráme B nebo $(B \cap C)$.

b. (0,5 bodu) Je-li $B_n = \bigcap_{j=1}^{n} A_j$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$, dokažte, že

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$$

Dokážeme každou inkluzi zvlášť:

(inkluze „$\subset$“) $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ znamená, že $\forall n \in \mathbb{N} : x \in A_n$, proto pro každé takové x platí, že je prvkem každé množiny B_n (pro každé $n \in \mathbb{N}$), a tudíž je i prvkem jejich průniku.

(inkluze „$\supset$“) $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$ znamená, že $\forall n \in \mathbb{N} : x \in B_n = \bigcap_{j=1}^{n} A_j$. Tedy pro každé $n \in \mathbb{N}$ náleží x do každé z množin $A_1, \dots, A_n$. Proto x náleží do všech množin A_n (pro všechna $n \in \mathbb{N}$) a tedy i do jejich průniku.

Jiný hezký způsob, který někteří z vás provedli, se zakládal na úvaze, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ je

$$B_1 \cap B_2 \cap \ldots \cap B_n = A_1 \cap (A_1 \cap A_2) \cap \ldots \cap (A_1 \cap \ldots \cap A_n) = A_1 \cap \ldots \cap A_n,$$

a tudíž totéž platí i pro „průniky donekonečna“, jen se toto muselo správně zapsat (bez použití nedefinovaných symbolů).

3. (1 bod) Dokažte matematickou indukcí, že pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ platí

$$2! \cdot 4! \cdot \ldots \cdot (2n)! > ((n+1)!)^n.$$

Hodně z vás se do tohoto příkladu zamotalo, ale dával jsem aspoň část bodů za provedený první indukční krok a nějaký kus kroku druhého. Pojďme na to:

1. indukční krok: pro $n = 2$ máme $48 > 36$, OK.

2. indukční krok: předpokládáme platnost tvrzení pro n, tedy tzv. indukční předpoklad (IP)

$$2! \cdot 4! \cdot \ldots \cdot (2n)! > ((n+1)!)^n. \tag{1}$$

Chceme dokázat totéž pro $n+1$, tedy

$$2! \cdot 4! \cdot \ldots \cdot (2n)! \cdot (2n+2)! > ((n+2)!)^{n+1}. \tag{2}$$

Díky (IP) víme, že levá strana nerovnosti (2) splňuje

$$2! \cdot 4! \cdot \ldots \cdot (2n)! \cdot (2n+2)! > ((n+1)!)^n \cdot (2n+2)! \tag{3}$$

a proto stačí dokázat neostrou nerovnost mezi pravými stranami vztahů (3) a (2)

$$((n+1)!)^n \cdot (2n+2)! \geq ((n+2)!)^{n+1}. \tag{4}$$

Pravou stranu ještě vyjádříme způsobem, který nám bude za chvíli užitečný:

$$((n+1)!)^n \cdot (2n+2)! \geq ((n+1)!)^n \cdot (n+1)! \cdot (n+2)^{n+1} \tag{5}$$

Tento vztah upravíme ekvivalentními úpravami na vztah, který bude zřejmě platný a tím bude proveden 2. indukční krok. Nejprve obě strany vztahu (5) vydělíme výrazem $((n+1)!)^n$, čímž dostaneme

$$(2n+2)! \geq (n+1)! \cdot (n+2)^{n+1} \tag{6}$$

a poté obě strany vydělíme výrazem $(n+1)!$, takže

$$(2n+2) \cdot (2n+1) \cdot \ldots \cdot (n+2) \geq (n+2)^{n+1}. \qquad (7)$$

Toto však už zřejmě platí, protože obě strany mají stejný počet činitelů (je jich $n+1$) a každý činitel vlevo je větší nebo roven $n+2$, což jsou činitele vpravo.

4. (1 bod) Označme množinu

$$M = \{\frac{1}{n};\ n \in \mathbb{N}\}.$$

Určete maximum, minimum, supremum a infimum množiny M, pokud existují, případně ukažte jejich neexistenci, vše podle příslušných definic.

Většina z vás dokázala odhadnout, že $\max M = \sup M = 1, \inf M = 0$ a $\min M$ neexistuje. Ale jak to precizně dokázat?

Nejsnazší je $\max M = 1$, to se můžeme shodnout, že je zřejmé, a díky tomu také $\sup M = \max M = 1$.

Dále vidíme, že 0 je dolní závora M, proč je to ale nejvyšší dolní závora? Můžeme použít epsilonové kritérium: je-li dáno $\varepsilon > 0$, najdeme $x \in M$, splňující $x < \varepsilon$, takto: pro dané $\varepsilon < 1$ jistě existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že $n \leq \frac{1}{\varepsilon} < n+1$. Pak zřejmě $\varepsilon > \frac{1}{n+1}$, klademe tedy $x = \frac{1}{n+1}$. Tady mnoho z vás dělalo chybu v tom, že jste brali třeba $x = \frac{\varepsilon}{2}$, což sice leží mezi 0 a ε, ale jelikož ε je libovolné reálné číslo, tak $\frac{\varepsilon}{2}$ obecně není prvkem množiny M (tedy zlomkem tvaru $\frac{1}{n}$), takže takto to x volit nemůžeme. Zato někteří šikovně napsali konkrétní předpis používající celou část čísla: $x = \frac{1}{[\frac{1}{\varepsilon}]+1}$.

A pak stačí říci, že pokud by existovalo $\min M$, muselo by být rovno $\inf M = 0$ a zároveň ležet v M, což víme že neleží. Anebo jste to mohli opět dokázat pomocí epsilonů, což většina z vás udělala (často se stejnou chybou jako u infima).

Lukáš Krump, 28.10.2024