Matematická analýza NOFY151, ZS 24/25, cvičení s L. Krumpem

Domácí úkol č. 1, Termín odevzdání: 21.10.2024.

1. K danému výroku zapište jeho negaci. Rozhodněte, zda platí původní výrok nebo jeho negace, zdůvodněte.

a. (0,5 bodu)

$$\exists c \in \langle -2, 2 \rangle \; \exists d \in \langle -2, 2 \rangle : c \neq d \wedge c^2 = d^2$$

b. (0,5 bodu)

$$\forall x \in \mathbb{R} \; \exists a \in \mathbb{Z} \; \exists b \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) : x = a + b$$

2. Dokažte množinové rovnosti ($A, B, \dots$ značí množiny).

a. (0,5 bodu)

$$(A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus (B \cap C)$$

b. (0,5 bodu) Je-li $B_n = \bigcap_{j=1}^{n} A_j$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$, dokažte, že

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$$

3. (1 bod) Dokažte matematickou indukcí, že pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ platí

$$2! \cdot 4! \cdot \ldots \cdot (2n)! > ((n+1)!)^n.$$

4. (1 bod) Označme množinu

$$M = \{\frac{1}{n};\ n \in \mathbb{N}\}.$$

Určete maximum, minimum, supremum a infimum množiny M, pokud existují, případně ukažte jejich neexistenci, vše podle příslušných definic.