Sada příkladů 2/3

Obyčejné diferenciální rovnice

Lineární rovnice 1. řádu

1. $y' \cos x = y \sin x + \cos^2 x$
2. $y' - 2\dfrac{y}{x} = x^3$
3. $y' + 2xy = 2x\mathrm{e}^{-x^2}$
4. $y' + y \sin x = \sin x \cos x$
5. $xy' + y = \ln x + 1$
6. $(2\mathrm{e}^y - x)y' = 1$. (Hledejte řešení ve tvaru $x = x(y)$.)
7. Najděte právě to řešení rovnice $y' \sin 2x = 2(y + \cos x)$, které je omezené pro $x \to \frac{\pi}{2}$.

Bernoulliova rovnice

8. $xy' - 2x^2\sqrt{y} = 4y$
9. $y' - 2xy = 2x^3y^2$
10. $y' - \dfrac{1}{x}y = \dfrac{1}{2y}$
11. $xy' + y = y^2 \ln x$, $y(1) = 1$
12. $y' - xy = -y^3\mathrm{e}^{-x^2}$
13. $y' - 9x^2y = (x^5 + x^2)y^{\frac{2}{3}}$, $y(0) = 0$.

①

Lineární rovnice 1. řádu

$y'(x) + p(x)y(x) = q(x)$

Metoda integračního faktoru: Násob rovnici výrazem $\exp\left(\int p(x)dx\right)$

Dostaneme $\left(y \cdot \exp\left(\int p(x)dx\right)\right)' = q(x)\exp\left(\int p(x)dx\right)$

$\Rightarrow y = \exp\left(-\int p(x)dx\right) \cdot \int q(x)\exp\left(\int p(x)dx\right)dx + C\exp\left(\int -p(x)dx\right)$

Musíme tedy vždy spočítat $\int p(x)dx$ a $\int q(x)\exp\left(\int p(x)dx\right)dx$

---

1) $y'\cos x = y\sin x + \cos^2 x$ Není omezení pro x v tomto tvaru

$y' - y\,\mathrm{tg}x = \cos x$. $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$. $p(x) = -\mathrm{tg}x$, $\int p(x)dx = -\int \frac{\sin x}{\cos x}dx = \ln|\cos x| =: P(x)$

$\exp P(x) = |\cos x|$ Použijeme $\cos x$ na intervalu $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

a místo $-\cos x$ také $\cos x$ na intervalu $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$

$\int q(x)\exp P(x)\,dx = \int \cos x \cdot \cos x\,dx = \int \cos^2 x\,dx = \int \frac{\cos 2x + 1}{2}dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + C$

$\Rightarrow y = \frac{C}{\cos x} + \frac{2x + \sin 2x}{4\cos x}$ na intervalech $(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$

Používáme fakt, že IF není určen jednoznačně, lze použít jakýkoli jeho násobek (u nás tedy $-e^{P(x)}$ místo $e^{P(x)}$) a tím se zbavit nutnosti pracovat s $|\cos x|$.

---

2) $y' - \frac{2y}{x} = x^3$ $x \neq 0$

$p(x) = -\frac{2}{x} \Rightarrow P(x) = \int -\frac{2}{x}dx = -2\ln|x| = \ln|x|^{-2} = \ln x^{-2}$

$\exp P(x) = x^{-2}$

$\int q(x)\exp P(x)\,dx = \int x^3 \cdot x^{-2}dx = \int x\,dx = \frac{x^2}{2} + C$

$\Rightarrow y(x) = Cx^2 + \frac{x^2}{2} \cdot x^2 = \underline{\underline{Cx^2 + \frac{x^4}{2}}}$ pro $x \in (-\infty, 0)$ a $x \in (0, \infty)$

Pro rovnici $xy' - 2y = x^4$ by šlo lepit v nule

---

3) $y' + 2xy = 2xe^{-x^2}$ $p(x) = 2x \rightarrow P(x) = \int 2x\,dx = x^2 \Rightarrow \exp P(x) = e^{x^2}$

$\int q(x)\exp P(x)\,dx = \int 2xe^{-x^2} \cdot e^{x^2}dx = \int 2x\,dx = x^2 + C$

$\Rightarrow \underline{\underline{y(x) = C \cdot e^{-x^2} + x^2 e^{-x^2}}}$ $x \in \mathbb{R}$

②

4) $y' + y\sin x = \sin x\cos x$

$p(x) = \sin x$

$P(x) = \int \sin x \, dx = -\cos x \Rightarrow \exp P(x) = e^{-\cos x}$

$\int q(x)\exp P(x)dx = \int \sin x\cos x\, e^{-\cos x} dx = \left| \begin{matrix} \cos x = t \\ -\sin x\, dx = dt \end{matrix} \right|$

$= -\int t e^{-t} dt = \left| \begin{matrix} f = t & g' = e^{-t} \\ f' = 1 & g = -e^{-t} \end{matrix} \right| = te^{-t} - \int e^{-t} dt = te^{-t} + e^{-t} + C$

$= e^{-\cos x}(\cos x + 1) + C$

$\Rightarrow \underline{\underline{y(x) = Ce^{\cos x} + \cos x + 1}}$, $x \in \mathbb{R}$

---

5) $xy' + y = \ln x + 1$, $x > 0$

$y' + \frac{y}{x} = \frac{\ln x + 1}{x}$

$p(x) = \frac{1}{x}$, $P(x) = \int \frac{1}{x} dx = \ln x \Rightarrow \exp P(x) = x$

$\int q(x)\exp P(x) dx = \int \ln x + 1\, dx = x + \int \ln x\, dx = \left| \begin{matrix} f' = 1 & g = \ln x \\ f = x & g' = \frac{1}{x} \end{matrix} \right| =$

$= x + x\ln x - \int 1 dx = x\ln x + C$

$\Rightarrow \underline{\underline{y(x) = \frac{C}{x} + \ln x}}$, $x > 0$

---

6) $(2e^y - x)y' = 1$ Řešení ve tvaru $x = x(y)$. Dle věty o derivaci inverzní fce

$x' = \frac{1}{y'}$

$\Rightarrow 2e^y - x = x'$, tj. $x' + x = 2e^y$

$p(y) = 1$, $P(y) = y$, $\exp P(y) = e^y$

$\int 2e^y \cdot e^y = \int 2e^{2y} dy = e^{2y} + C$

$\Rightarrow \underline{\underline{x(y) = Ce^{-y} + e^y}}$ pro $y \in \mathbb{R}$

---

7) DÚ

BERNOULLIOVA ROVNICE

$y'(x) + p(x)y(x) = q(x)y^{\alpha}(x)$ $\alpha = 0, 1$ už umíme.

$y \equiv 0$ je buď triviální řešení nebo na $y = 0$ nemá rovnice smysl.

$y'(x) \cdot y^{-\alpha}(x) + p(x) y^{1-\alpha}(x) = q(x)$ a definujeme $z(x) = y^{1-\alpha}(x)$.

$\Downarrow$

$z'(x) = y^{-\alpha}(x) y'(x) \cdot (1-\alpha)$

$\frac{z'(x)}{1-\alpha} + p(x)z(x) = q(x)$ a máme lineární rovnici pro $z(x)$.

Vyřešíme a $y(x) = (z(x))^{\frac{1}{1-\alpha}}$

③

8) $xy' - 2x^2\sqrt{y} = 4y$ $\qquad y \equiv 0$ je řešení, $x \in \mathbb{R}$. Potřebujeme $y \geq 0$

$y' - \frac{4}{x}y = 2x\sqrt{y}$, tj. $\alpha = 1/2$

$y' \cdot y^{-1/2} - \frac{4}{x}y^{1/2} = 2x \qquad z(x) = y^{1/2} \Rightarrow z'(x) = \frac{1}{2}y^{-1/2} \cdot y'$

$2z' - \frac{4}{x}z = 2x$, tj. $z' - \frac{2}{x}z = x \qquad p(x) = -\frac{2}{x} \Rightarrow P(x) = -2\ln|x| = \ln x^{-2}$

$\exp P(x) = x^{-2}$

$$\int q(x)\exp P(x)\,dx = \int x \cdot x^{-2}\,dx = \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$$

Tohle platí jen pro taková x, že ln|x| + C >= 0, aby z >= 0!

$\Rightarrow z(x) = Cx^2 + x^2\ln|x|$

$\Rightarrow \underline{\underline{y(x) = \left(Cx^2 + x^2\ln|x|\right)^2}}$

Tohle platí opět pro |x| >= exp(-C), v krajních bodech ale můžeme slepit s triviálním řešením a dostat řešení na celém R.
Zároveň se z triviálního řešení můžeme "odlepovat" v libovolném bodě (pro každé x ex. C, že |x|=e^(-C)).

---

9) $y' - 2xy = 2x^3y^2$ $\qquad y \equiv 0$ je řešení, $x \in \mathbb{R}$

$y'y^{-2} - 2xy^{-1} = 2x^3 \qquad z = y^{-1},\ z' = -y^{-2}y'$

$-z' - 2xz = 2x^3$

$z' + 2xz = -2x^3 \qquad p(x) = 2x \Rightarrow P(x) = x^2,\ \exp(P(x)) = e^{x^2}$

$$\int q(x)\exp(P(x))\,dx = -2\int x^3 e^{x^2}\,dx = \left|\begin{matrix} t = x^2 \\ dt = 2x\,dx \end{matrix}\right| = -\int t e^t\,dt = \left|\begin{matrix} f = t & g' = e^t \\ f' = 1 & g = e^t \end{matrix}\right| =$$

$$= -te^t + e^t + C = e^{x^2}(1 - x^2) + C$$

$\Rightarrow z = Ce^{-x^2} + (1 - x^2)$

$\Rightarrow \underline{\underline{y(x) = \frac{1}{1 + Ce^{-x^2} - x^2}}}$ na intervalech, kde je jmenovatel nenulový lepit nejde, $y = 0$ nedostaneme pro konečná x.

---

10) $y' - \frac{y}{x} = \frac{1}{2y}$ $\qquad y \neq 0,\ x \neq 0$

$yy' - \frac{y^2}{x} = \frac{1}{2} \qquad z = y^2 \quad z' = 2yy'$

$\frac{z'}{2} - \frac{z}{x} = \frac{1}{2} \Rightarrow z' - \frac{2}{x}z = 1 \qquad p(x) = -\frac{2}{x} \Rightarrow P(x) = -2\ln|x| = \ln x^{-2}$

$\exp P(x) = x^{-2}$

$$\int q(x)\exp(P(x)) = \int x^{-2}\,dx = -\frac{1}{x} + C$$

$\Rightarrow z(x) = Cx^2 - x$ tam, kde $Cx^2 - x > 0 \longrightarrow x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1}}{2C} = 0, \frac{1}{C}$

$\underline{\underline{y(x) = \pm\sqrt{Cx^2 - x}}}$

pro $C > 0$ je $x \in (-\infty, 0)$ a $x \in \left(\frac{1}{C}, +\infty\right)$

pro $C < 0$ je $x \in \left(\frac{1}{C}, 0\right)$

---

11) DÚ

12) $y' - xy = -y^3 e^{-x^2}$ $\qquad y \equiv 0$ je řešení

$y'y^{-3} - xy^{-2} = -e^{-x^2}$ $\qquad z(x) = y^{-2},\ z'(x) = -2y^{-3}y'$

$-\frac{z'}{2} - xz = -e^{-x^2}$

$z' + 2xz = 2e^{-x^2}$ $\qquad p(x) = 2x,\ P(x) = x^2,\ \exp P(x) = e^{x^2}$

$\int q(x)\exp P(x)dx = \int 2dx = 2x + C$

$z(x) = Ce^{-x^2} + 2xe^{-x^2} = (C+2x)e^{-x^2}$, $z>0$, tj. $C+2x>0$, $x > -\frac{C}{2}$

$$y(x) = \pm\frac{1}{\sqrt{(C+2x)e^{-x^2}}} \quad \text{pro } x \in \left(-\frac{C}{2}, +\infty\right)$$

$y = 0$ nelze slepit

---

13) $y' - 9x^2y = (x^5 + x^2)y^{2/3}$ $\qquad y(0) = 0.$ $\qquad y \equiv 0$ je řešení

$y'y^{-2/3} - 9x^2y^{1/3} = x^5 + x^2$ $\qquad y^{1/3} = z \qquad z' = \frac{1}{3}y^{-2/3}y'$

$3z' - 9x^2z = x^5 + x^2$

$z' - 3x^2z = \frac{x^5+x^2}{3}$ $\qquad p(x) = -3x^2,\ P(x) = -x^3,\ \exp P(x) = e^{-x^3}$

$$\int \frac{x^5+x^2}{3}e^{-x^3}dx = \begin{vmatrix} t = -x^3 \\ dt = -3x^2dx \end{vmatrix} = \frac{1}{9}\int (t-1)e^t dt = -\frac{e^t}{9} + \frac{1}{9}\int te^t dt$$

$$\begin{vmatrix} f = t & g' = e^t \\ f' = 1 & g = e^t \end{vmatrix} = -\frac{e^t}{9} + \frac{1}{9}(te^t - e^t) = \frac{1}{9}\cdot(-x^3)\cdot e^{-x^3} \underset{-\frac{2}{9}e^t}{} = -\frac{x^3}{9}e^{-x^3} \underset{-\frac{2}{9}e^{-x^3}}{} + C$$

$z(x) = Ce^{x^3} - \frac{x^3}{9} - \frac{2}{9}$

$y(x) = \left(Ce^{x^3} - \frac{x^3}{9} - \frac{2}{9}\right)^3$ $\qquad y(0) = 0:\ 0 = \left(C - \frac{2}{9}\right)^3 \Rightarrow C = \frac{2}{9}$

$$y(x) = \frac{1}{9^3}\left(2e^{x^3} - x^3 - 2\right)$$, kromě toho také $y \equiv 0$

Ovšem pozor! pro všechna $C \in \mathbb{R}$ vždy existuje alespoň jedno řešení rovnice $Ce^{x^3} - x^3 - 2 = 0$. V tomto bodě pak lze tato řešení lepit k $y \equiv 0$, lehce si uvědomíme, že y' je v tomto bodě taky 0, takže poč. podmínka $y(0) = 0$ nedává jednoznačné řešení.