Newtonův a Riemannův integrál

Spočtěte

1. $\displaystyle\int_0^{\ln 2} \sqrt{\mathrm{e}^x - 1}\,\mathrm{d}x$

2. $\displaystyle\int_0^1 \arccos x\,\mathrm{d}x$

3. $\displaystyle\int_0^\infty x^{2k-1} e^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x, \qquad k \in \mathbb{N}$

4. $\displaystyle\int_0^{4\pi} \frac{1}{1+\sin^2 x}\,\mathrm{d}x$

5. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{\sin^4 x + \cos^4 x}\,\mathrm{d}x$

6. $\displaystyle\int_2^\infty \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$

7. $\displaystyle\int_0^\infty \mathrm{e}^{-3x}\,\mathrm{d}x$

8. $\displaystyle\int_0^1 x\ln x\,\mathrm{d}x$

9. $\displaystyle\int_0^\infty \mathrm{e}^{-ax}\cos(bx)\,\mathrm{d}x$

10. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x\,\mathrm{d}x$

11. Spočtěte použitím definice Riemannova integrálu

$$\int_0^\pi \ln(1 - 2\alpha\cos x + \alpha^2)\,\mathrm{d}x\,,$$

$|\alpha| \neq 1$.

Zjistěte, zda konvergují integrály

12. $\displaystyle\int_0^\infty x^p \,\mathrm{d}x, \quad p \in \mathbb{R}$

13. $\displaystyle\int_1^\infty x^p \,\mathrm{d}x, \quad p \in \mathbb{R}$

14. $\displaystyle\int_0^{10} x^p \,\mathrm{d}x, \quad p \in \mathbb{R}$

15. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^{\frac{3}{2}}}{1+x^2} \,\mathrm{d}x$

16. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x(1-x^2)}} \,\mathrm{d}x$

17. $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{\ln x} \,\mathrm{d}x$

18. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln \sin x}{x^p} \,\mathrm{d}x, \quad p \in \mathbb{R}$

19. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg} x}{x^{\frac{3}{2}}} \,\mathrm{d}x$

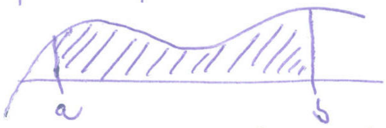
Určitý integrál

Riemannův integrál $(R)\int_a^b f(x)\,dx$ .... $a,b\in\mathbb{R}$, pracujeme na uzavřeném intervalu $[a,b]$

f omezená fce

definice přes horní a dolní součty

význam: plocha pod křivkou



Newtonův integrál $(N)\int_a^b f(x)\,dx$ ... lze integrovat na neomezených intervalech

pracujeme na otevřeném intervalu (a,b)

definice pomocí primitivní fce

$$(N)\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{x\to b_-} F(x) - \lim_{x\to a_+} F(x)$$

Terminologie: integrál konverguje = existuje a je konečný

diverguje = existuje a je $+\infty$ nebo $-\infty$

neexistuje (např. vyjde $\infty-\infty$)

Pokud existují oba integrály, tak $(N)\int_a^b f(x) = (R)\int_a^b f(x)$. Typicky to je pro spojité a omezené funkce na omezeném intervalu.

Počítání: stejné triky jako pro primitivní fce, pozor na přepočítávání mezí při substitucích!

Užitečné: Pro $a<b$ definujeme $\int_b^a f = -\int_a^b f$ a speciálně $\int_a^a f = 0$

Pozor na předpoklady druhé substituční věty, že $\varphi' \neq 0$!

②

1) $\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1}\, dx$ ... spoj., omez. na omez. intervalu : existují (R) i (N)

$\qquad \| $

Substituce $e^x - 1 = t$ (prostá) $\quad x=0: e^0 - 1 = 1-1 = 0$, $\; x = \ln 2 : e^{\ln 2} - 1 = 2 - 1 = 1$ > nové meze

$e^x dx = dt$

$dx = \dfrac{dt}{t+1}$

$= \displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt{t}\, dt}{t+1}$ substituce $\sqrt{t} = s$ (prostá) $\quad t=0 : \sqrt{0} = 0$, $\; t = 1 : \sqrt{1} = 1$ > nové meze

$\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{t}} dt = ds$

$dt = 2s\,ds$

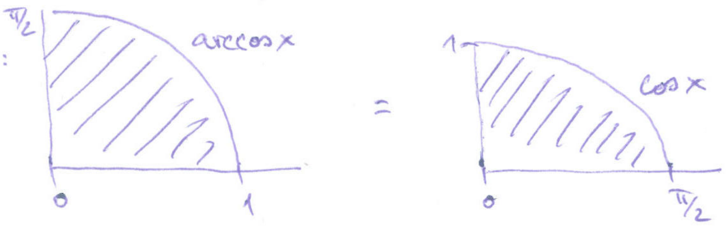
$$= \int_0^1 \frac{2s^2\, ds}{s^2+1} = 2\int_0^1 \left(1 - \frac{1}{s^2+1}\right) ds = 2\cdot\left[s - \operatorname{arctg} s\right]_0^1 = 2\cdot\left[\left(1 - \tfrac{\pi}{4}\right) - (0-0)\right] =$$

$$= \underline{\underline{2 - \tfrac{\pi}{2}}}$$

---

2) $\int_0^1 \arccos x\, dx$ .... spoj., omez., omez. int. => ex. (N) i (R)

Trik :



Proto $I = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos x\, dx = \left[\sin x\right]_0^{\pi/2} = 1 - 0 = \underline{\underline{1}}$

Jinak : substituce $t = \arccos x$ $\quad x = 0 \Rightarrow \arccos 0 = \frac{\pi}{2}$, $\; x = 1 \Rightarrow \arccos 1 = 0$

$dt = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \Rightarrow dx = -\sqrt{1-x^2}\, dt = -\sin t\, dt$

$$I = \int_{\pi/2}^0 -t\sin t\, dt = \int_0^{\pi/2} t \sin t\, dt \underset{\text{P.P.}}{=} \left[-t\cos t\right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} -\cos t\, dt = (0-0) + \int_0^{\pi/2} \cos t\, dt = \underline{\underline{1}}$$

---

3) $I_k = \int_0^\infty x^{2k-1} e^{-x^2/2}\, dx$ .... neomez. interval => (N)

$I_1 = \int_0^\infty x e^{-x^2/2}\, dx$ substituce $t = x^2/2$ (prostá — na $x \in (0,\infty)$) $\quad x = 0 \Rightarrow t = 0$, $\; x = \infty \Rightarrow t = \infty$ > nové meze

$dt = x\,dx$

$$= \int_0^\infty e^{-t}\, dt = \left[-e^{-t}\right]_0^\infty = \left(-0 - (-1)\right) = 1$$

I_k : per partes : $\quad f' = x^{2k-1}$, $\; g = e^{-x^2/2}$, $\; f = \dfrac{x^{2k}}{2k}$, $\; g' = e^{-x^2/2}\cdot(-x)$

$$\Rightarrow I_k = \left[\frac{x^{2k}}{2k} e^{-x^2/2}\right]_0^\infty + \int_0^\infty \frac{x^{2k}}{2k} e^{-x^2/2}\cdot x\, dx$$

$$= 0 - 0 + \frac{1}{2k} I_{k+1}$$

Odtud tedy $I_1 = 1$ a $I_{k+1} = 2k\, I_k$ a tedy $I_k = 2^{k-1}\cdot(k-1)!$

4) $I = \int_0^{4\pi} \frac{dx}{1+\sin^2 x}$ .... existuje (R) i (N)

substituce $t = \operatorname{tg} x$
$dx = \frac{dt}{t^2+1}$
$1+\sin^2 x = \frac{2t^2+1}{t^2+1}$
vede na integrál $\int \frac{1}{2t^2+1}\, dt$

Ale pozor, tato substituce nefunguje v bodech $x = \pi/2 + k\pi$ (takové jsou 4 na našem intervalu)

Nelze proto říct, že $x=0 \Rightarrow t=0$
$x = 4\pi \Rightarrow t = 0$ a integrál je nula, to je špatně !!

1. postup: najít spojitou primitivní fci na $(0, 4\pi)$:

$$\int \frac{dt}{2t^2+1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}(\sqrt{2}t) \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}(\sqrt{2} \operatorname{tg} x) + C_k = F(x)$$

Zvolíme $C_0 = 0$ na intervalu $(0, \pi/2) \Rightarrow C_1 = \pi/\sqrt{2}$ na $(\pi/2, 3\pi/2)$
$C_2 = 2\pi/\sqrt{2}$ na $(3\pi/2, 5\pi/2)$
$C_3 = 3\pi/\sqrt{2}$ na $(5\pi/2, 7\pi/2)$
$C_4 = 4\pi/\sqrt{2}$ na $(7\pi/2, 4\pi)$

a $I = F(4\pi) - F(0) = 0 + C_4 - 0 = \underline{\underline{4\pi/\sqrt{2}}}$

2. postup: $\sin^2 x$ je π-periodická, proto $I = 4 \cdot \int_0^{\pi} \frac{dx}{1+\sin^2 x}$

Navíc pro $g(x) = \sin^2 x$ platí $g(x) = g(\pi - x)$ pro $x \in (0, \pi/2)$
Proto totéž platí pro $f(x) = \frac{1}{1+\sin^2 x}$: $f(x) = f(\pi - x)$.

Odtud $\int_0^{\pi/2} f(x)\,dx = \int_0^{\pi/2} f(\pi - x)\,dx \underset{\substack{y=\pi-x \\ dy=-dx}}{=} \int_{\pi/2}^{\pi} f(y)\,dy$ a tedy $I = 8 \cdot \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+\sin^2 x}$

a nyní už $I = 8 \cdot \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}(\sqrt{2}t)\right]_0^{+\infty} = 8 \cdot \frac{\pi}{2\sqrt{2}} = \underline{\underline{\frac{4\pi}{\sqrt{2}}}}$

---

5) Analogicky jako 4, DÚ

---

6) $\int_2^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = \left[-x^{-1}\right]_2^{\infty} = -0 - (-2^{-1}) = \underline{\underline{1/2}}$ (jde o (N))

---

7) $\int_0^{\infty} e^{-3x}\,dx = \left[-\frac{1}{3}e^{-3x}\right]_0^{\infty} = -0 - \left(-\frac{1}{3}\right) = \underline{\underline{1/3}}$ (jde o (N))

---

8) $\int_0^1 x \ln x\,dx \underset{\text{p.p.}}{=} \left[\frac{x^2}{2}\ln x\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{2}\,dx = 0 - \left[\frac{x^2}{4}\right]_0^1 = \underline{\underline{-1/4}}$ (jde o (N) i (R))

9) $\int_0^\infty e^{-ax}\cos(bx) = I$ jde o (N), $a>0$ aby postup fungoval

$$I \underset{\text{per partes}}{=} \left[\frac{e^{-ax}}{-a}\cos bx\right]_0^\infty - \frac{b}{a}\int e^{-ax}\sin(bx) \underset{\text{per partes}}{=} 0 - \frac{1}{-a} - \frac{b}{a}\left(\left[\frac{e^{-ax}}{-a}\sin bx\right]_0^\infty + \frac{b}{a}I\right)$$

$f' = e^{-ax}$ $g = \cos(bx)$

$f = \frac{e^{-ax}}{-a}$ $g' = -b\sin(bx)$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{a} - \frac{b^2}{a^2}I \Rightarrow \underline{\underline{I = \frac{a}{a^2+b^2}}}$$

---

10) $\int_0^{\pi/2} \operatorname{tg} x\,dx$ jde o (N) (fce není omezená a není def. v $x=\pi/2$)

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x\,dx}{\cos x} \quad \text{subst. } \begin{matrix} t = \cos x \\ dt = -\sin x\,dx \end{matrix} \quad \begin{matrix} x=0 \Rightarrow t=1 \\ x=\pi/2 \Rightarrow t=0 \end{matrix}$$

$$= \int_1^0 -\frac{1}{t}dt = \int_0^1 \frac{1}{t}dt = [\ln t]_0^1 = +\infty \quad \text{Integrál diverguje!!}$$

---

11) Označme $g(\alpha) = \int_0^\pi \ln(1-2\alpha\cos x+\alpha^2)\,dx$. Očividně $g(0) = \int_0^\pi \ln 1\,dx = 0$

Dále ukážeme, že g je spojitá v bodě 0. Chceme $\forall\varepsilon\,\exists\delta: |\alpha|<\delta \Rightarrow |g(\alpha)|<\varepsilon$, neboli chceme ukázat, že $\int_0^\pi \ln(1-2\alpha\cos x+\alpha^2)dx$ uděláme libovolně malé volbou dostatečně malého α.

Máme $\cos x \in [-1,1]$ pro $x\in[0,\pi]$, tedy $1-2\alpha\cos x+\alpha^2 \in [(1-\alpha)^2,(1+\alpha)^2]$
a $\ln(----) \in [2\ln(1-\alpha), 2\ln(1+\alpha)]$

Proto $|g(\alpha)| \le \max\{2|\ln(1-\alpha)|, 2|\ln(1+\alpha)|\}\cdot\pi$, což je pro α blízko 0 libovolně malé.

Nyní využijeme trik: $\cos x = -\cos(\pi - x)$ [symetrie fce $\cos x$] a rozdělíme integrál na dva

$$g(\alpha) = \int_0^{\pi/2} \ln(1-2\alpha\cos x+\alpha^2)dx + \int_{\pi/2}^{\pi} \ln(1-2\alpha\cos x+\alpha^2)dx = g_1(\alpha) + g_2(\alpha)$$

$$\begin{matrix} y = \pi - x \\ dy = -dx \end{matrix} \quad \begin{matrix} x=\pi/2 \Rightarrow y=\pi/2 \\ x=\pi \Rightarrow y=0 \end{matrix} \Rightarrow g_2(\alpha) = \int_0^{\pi/2} \ln(1+2\alpha\cos y+\alpha^2)dy$$

y je zde jen integrační proměnná, můžeme ji přejmenovat na x. Proto

$$g(\alpha) = g_1(\alpha)+g_2(\alpha) = \int_0^{\pi/2}\ln(1-2\alpha\cos x+\alpha^2)dx + \int_0^{\pi/2}\ln(1+2\alpha\cos x+\alpha^2)dx = \int_0^{\pi/2}\ln[(1-2\alpha\cos x+\alpha^2)(1+2\alpha\cos x+\alpha^2)]dx$$

$$= \int_0^{\pi/2}\ln((1+\alpha^2)^2 - 4\alpha^2\cos^2 x)dx = \int_0^{\pi/2}\ln(1+\alpha^4+2\alpha^2(1-2\cos^2 x))dx = \int_0^{\pi/2}\ln(1-2\alpha^2\cos 2x+\alpha^4)dx \underset{y=2x}{=}$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^\pi \ln(1-2\alpha^2\cos y+\alpha^4)dy = \frac{1}{2}g(\alpha^2)$$

Nyní už můžeme zapomenout na integrál a věnovat se jen funkci g.
Víme: $g(0)=0$, g je spojitá v nule, tedy malá na okolí nuly a pro libovolné α platí vztah $g(\alpha) = \frac{1}{2} g(\alpha^2)$. Tvrdíme, že odtud už nutně $g(\alpha) \equiv 0$ pro $|\alpha| < 1$.
Sporem: nechť $\alpha_0 \in (-1,1)$ takové, že $g(\alpha_0) \neq 0$. Vytvoříme posloupnost bodů $\{\alpha_k\}_{k=0}^{+\infty}$ tak, že $\alpha_{k+1} = \alpha_k^2$. Očividně $\alpha_k \in (-1,1)$ $\forall k$ a $\alpha_k \to 0$ pro $k \to +\infty$.
BÚNO $g(\alpha_0) > 0$ (jinak analogicky). Máme $g(\alpha_{k+1}) = 2g(\alpha_k)$. Proto $\{g(\alpha_k)\}$ je rostoucí a divergující do $+\infty$. To je ovšem spor s tím, že $g(\alpha)$ je libovolně malé pro malá α (neboli $g(\alpha_k)$ je libovolně malé pro velká k).

Konvergence ~~...~~ Newtonových integrálů

Někdy nás zajímá jen to, zda je integrál konečný (konverguje) nebo ne.
Proto potřebujeme znalosti chování základních integrálů na okolí klíčových bodů.

13) $\int_1^\infty x^p \, dx$, $p \in \mathbb{R}$. Dolní mez 1 není zajímavá, stejně to projde pro každé $a > 0$.

$p \neq -1$: $\int x^p = \frac{x^{p+1}}{p+1}$: $\frac{1}{p+1}\left[x^{p+1}\right]_1^\infty$ a potřebujeme $\lim_{x\to\infty} x^{p+1} \neq \infty \Rightarrow \boxed{p<-1}$

$p = -1$: $\int x^{-1} = \ln x$: $\left[\ln x\right]_1^\infty = \infty$.

Celkem: integrál konverguje pro $p < -1$. Základní znalost, která se používá dále.

---

14) $\int_0^{10} x^p \, dx$, $p \in \mathbb{R}$. Zde horní mez není zajímavá, zajímá nás chování u nuly

$p \neq -1$: $\int x^p = \frac{x^{p+1}}{p+1}$: $\frac{1}{p+1}\left[x^{p+1}\right]_0^{10} \Rightarrow$ potřebujeme $\lim_{x\to 0_+} x^{p+1} \neq \infty \Rightarrow \boxed{p>-1}$

$p = -1$: $\int x^p = \ln x$: $\left[\ln x\right]_0^{10} = \infty$

Celkem: integrál konverguje pro $p > -1$. Opět základní znalost

---

12) $\int_0^\infty x^p \, dx = \int_0^1 x^p \, dx + \int_1^\infty x^p \, dx$. První konverguje pro $p > -1$, druhý pro $p < -1$,

součet nekonverguje nikdy!

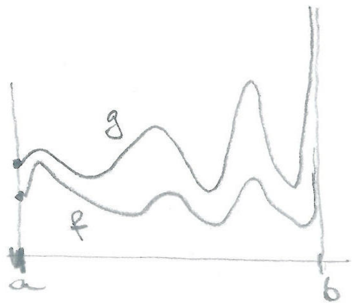
Dále budeme využívat následující kritéria

(SK): SROVNÁVACÍ KRITÉRIUM

f, g spojité, nezáporné na $\langle a, b)$ a $f \leq g$ na $\langle a, b)$.

Pak $\int_a^b g$ konverguje $\Rightarrow$ $\int_a^b f$ konverguje a naopak

$\int_a^b f$ diverguje $\Rightarrow$ $\int_a^b g$ diverguje.



(LSK): LIMITNÍ SROVNÁVACÍ KRITÉRIUM

f, g spojité na $\langle a, b)$, f nezáporná. Nechť existuje konečná a nenulová limita

$\lim_{x \to b_-} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)$. Pak $\int_a^b f$ konverguje $\Leftrightarrow$ $\int_a^b g$ konverguje

(Neboli $f \sim g$ na okolí b)

Podobně fungují tato kritéria u dolní meze.

---

15) $\int_0^\infty \frac{x^{3/2}}{1+x^2} dx$. Uvnitř $(0, \infty)$ není problémový bod $\Rightarrow$ vyšetříme body 0 a ∞

Na okolí 0: $\frac{x^{3/2}}{1+x^2} \sim x^{3/2}$, $x \to 0_+$ $\quad$ $3/2 > -1 \Rightarrow$ (LSK) u 0 konverguje

Na okolí ∞: $\frac{x^{3/2}}{1+x^2} \sim x^{-1/2}$, $x \to +\infty$ $\quad$ $-1/2 > -1 \Rightarrow$ (LSK) u ∞ diverguje

Celkem integrál diverguje.

---

16) DÚ

---

17) $\int_0^2 \frac{1}{\ln x} dx$. Problémové body: $\lim_{x \to 0_+} \frac{1}{\ln x} = 0$! $\quad$ 0 není problémový bod

$\ln x = 0 \Rightarrow x = 1$ je problémový bod.

Víme: $\lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1 \Rightarrow \ln x \sim x - 1$, $x \to 1$

Na okolí 1 tak vyšetříme $\int \frac{1}{x-1}$, to je totéž co $\int \frac{1}{y}$ na okolí 0.

To víme, že diverguje. Proto podle (LSK) $\int_0^2 \frac{1}{\ln x} dx$ diverguje.

18) $\int_0^{\pi/2} \frac{\ln(\sin x)}{x^p}\,dx$, $p \in \mathbb{R}$. Problémový je jen bod 0.

Víme, že $\ln(\sin x) \sim \ln x$, $x \to 0_+$ (např. l'Hospitalem). Stačí tak vyšetřit

$\int_0^{\pi/2} \ln x \cdot x^{-p}\,dx$. Je-li $p < 1$ (tedy $-p > -1$), pak (SK) $|\ln x| \cdot x^{-p} \leq x^{-p-\varepsilon}$

pro lib. malé ε, zvolíme tak malé ε, aby $-p-\varepsilon > -1$.

Potom $\int_0^{\pi/2} x^{-p-\varepsilon}$ konv. $\overset{(SK)}{\Rightarrow} \int_0^{\pi/2} |\ln x| \cdot x^{-p}\,dx$ konv. $\Leftrightarrow \int_0^{\pi/2} \ln x \cdot x^{-p}$ konv. $\overset{(LSK)}{\Leftrightarrow} \int_0^{\pi/2} \frac{\ln(\sin x)}{x^p}$ konv.

Je-li $p \geq 1$ ($-p \leq -1$), pak (SK): $|\ln x| \cdot x^{-p} \geq x^{-p}$ na okolí 0 a

$\int_0^{\pi/2} x^{-p}$ div. $\overset{(SK)}{\Rightarrow} \int_0^{\pi/2} |\ln x| \cdot x^{-p}\,dx$ div $\Leftrightarrow \int_0^{\pi/2} \ln x \cdot x^{-p}\,dx$ div $\overset{(LSK)}{\Leftrightarrow} \int_0^{\pi/2} \frac{\ln(\sin x)}{x^p}\,dx$ div.

Celkem: integrál konverguje pro $p < 1$.

---

19) $\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^{3/2}}\,dx$ Problémové body 0 a ∞

v 0: $\operatorname{arctg} x \sim x \Rightarrow \frac{\operatorname{arctg} x}{x^{3/2}} \sim x^{-1/2}$, $-1/2 > -1 \Rightarrow$ v 0 dle (LSK) konv.

v ∞: $\operatorname{arctg} x \sim 1 \Rightarrow \frac{\operatorname{arctg} x}{x^{3/2}} \sim x^{-3/2}$, $-3/2 < -1 \Rightarrow$ v ∞ dle (LSK) konv.

$\Rightarrow$ integrál konverguje