

Cvičení č. 3: Základní vlastnosti posloupností, limity posloupností

1. Vyšetřete monotonii a omezenost následujících posloupností $\{a_n\}$:

(a) $a_n = \frac{2n+1}{n+1}$

(b) $a_n = 100 - 3n$

(c) $a_n = 3^n$

(d) $a_n = (-2)^n$

(e) $a_n = \left(-\frac{1}{5}\right)^n$

(f) $a_n = \frac{1}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$, kde $[x]$ značí celou část reálného čísla x .

U kterých těchto posloupností víme, že mají limitu? Které mají konečnou limitu?

2. Určete limitu posloupnosti pomocí definice:

(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{n+1}$

(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3^n}$

(c) $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n$

(d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n}$

3. Vypočtěte limity (s použitím aritmetiky limit):

(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} 3n^5 + 4n^4 + 7n^2$

(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} 3n^3 - 5n^2 + n$

(c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n+1}{3n-2}$

(d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2-4n+1}{2n+7}$

$$(e) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - 5n}{4n^3 + 3n - 1}$$

$$(f) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1+2+\dots+n}{n+2} - \frac{n}{2} \right)$$

$$(g) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^2+2^2+\dots+n^2}{n^2}$$

$$(h) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^2+2^2+\dots+n^2}{n^3}$$

$$(i) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^3+2^3+\dots+n^3}{n^4}$$

$$(j) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n-3)^{10}(3n+1)^{10}}{(4n+2)^{20}}$$

Řešení:

1. (a) rostoucí, omezená, proto má konečnou limitu; (b) klesající, shora omezená, zdola neomezená, proto má limitu; (c) rostoucí, zdola omezená, proto má limitu; (d) není monotónní, není omezená ani z jedné strany, o existenci limity nám to nic neříká; (e) není monotónní, je omezená, o existenci limity nám to nic neříká; (f) nerostoucí (ale nikoli klesající), omezená, proto má konečnou limitu.

2. (a) 2; (b) 0; (c) neexistuje; (d) ∞ .

3. (a) ∞ ; (b) ∞ ; (c) 2; (d) ∞ ; (e) 0; (f) $-\frac{1}{2}$; (g) ∞ ; (h) $\frac{1}{3}$; (i) $\frac{1}{4}$; (j) $\frac{3^{10}}{2^{30}}$.