Matematická analýza NMTM101, ZS 22/23, cvičení s L. Krumpem

Cvičení č. 2: Matematická indukce, supremum–infimum

1. Dokažte matematickou indukcí (pro každé $n \in \mathbb{N}$):

(a) $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

(b) $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

(c) $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + \cdots + n)^2$

(d) $\forall a, b \in \mathbb{R} : (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$

(e) $2! \cdot 4! \cdot \ldots \cdot (2n)! > ((n+1)!)^n$ pro $n > 1$

2. Určete infimum, minimum, supremum, maximum následujících množin:

(a) $(0, 1\rangle$

(b) $(0, \infty)$

(c) $\{x \in \mathbb{Q}; x^2 < 2\}$

(d) $\{x \in \mathbb{R}; x^2 < 2\}$

(e) $\{x \in \mathbb{Q}; x^2 \leq 2\}$

(f) $\{x \in \mathbb{R}; x^2 \leq 2\}$

(g) $\{\frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}\}$

Jaký by se změnil výsledek, kdybychom v případech (c) a (e) uvažovali „racionální analogii suprema“? Platí analogie Věty o supremu v oboru racionálních čísel?