

Metrické prostory, topologie \mathbb{R}^n

1. Jako vzdálenost mezi dvěma místy na území ČR definujme jako
 - a) vzdálenost na mapě b) nejkratší vzdálenost jízdy autem c) cena jízdenky ČD. Jde v těchto případech o metriku? (Pro případ b), c) ji chápeme pouze na takové podmnožině, kde má funkce vzdálenost smysl.)
2. Ověřte, zda následující množiny posloupností $x = (x_1, x_2, \dots)$ jsou metrické prostory.
 - a) Množina l_1 všech posloupností splňující $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < \infty$ s metrikou $\varrho(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n - y_n|$
 - b) Množina l_2 všech posloupností splňující $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty$ s metrikou $\varrho(x, y) = (\sum_{n=1}^{\infty} |x_n - y_n|^2)^{\frac{1}{2}}$
 - c) Množina l_{∞} všech posloupností splňující $\sup_n |x_n| < \infty$ s metrikou $\varrho(x, y) = \sum_n |x_n - y_n|$.

3. V \mathbb{R}^2 s obvyklou metrikou najděte uzávěry grafů následujících funkcí
 - a)

$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

- b) $f(x) = D(x)$ (Dirichletova funkce).

4. Najděte vnitřek, uzávěr a hranici následujících množin
 - a) Množina všech racionálních čísel z intervalu $(0, 1) \subset \mathbb{R}$
 - b) Množina všech $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ splňujících nerovnosti

$$x^2 + y^2 < 1, \quad y \geq 0$$

- c) Množina všech $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ splňujících nerovnosti

$$|z| < x^2 + y^2 \leq 1$$

- d) $\mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}\}$

- e) Jednotkový kruh se středem v počátku bez úsečky $[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]$.

5. Které z následujících množin jsou otevřené resp. uzavřené
 a) Množina všech $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ splňujících nerovnost

$$x^2 + y^2 + z^2 > 1.$$

- b) Množina všech $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ splňujících nerovnost

$$1 < x^2 + y^2 + z^2 \leq 2.$$

6. Najděte vnitřek a uzávěr množin (v závislosti na $t \in \mathbb{R}$)

$$M_t = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; (|x| + |y|)e^{-(|x|+|y|)} \leq t\}.$$

7. Je množina

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; 2 \leq xyz < 4\}$$

omezená?

8. Dokažte omezenost množiny

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^3 + y^3 - 2xy = 0, x \geq 0, y \geq 0\}.$$

9. Dokažte souvislost množiny

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^4 + |\arctg x| + y^2 e^{|y|} = 2\}.$$

10. Nechť $A \subset X$. Dokažte, že $\partial A = \overline{A} \cap \overline{(X \setminus A)}$.

11. Nechť $A, B \subset \mathbb{R}^N$. Ukažte, že $(\partial A \times B) \cup (A \times \partial B) \subset \partial(A \times B)$. Kdy platí rovnost?

12. Nechť X, Y jsou metrické prostory (popř. $\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^M$ pokud vám to pomůže pro lepší představu). Nechť $A, B \subset X$. Dokažte

- $\overline{A} = \text{int } A \cup \partial A$ (disjunktně)
- $X = \text{int } A \cup \text{ext } A \cup \partial A$ (disjunktně)
- \overline{A} je nejmenší uzavřená nadmnožina A
- $\text{int } A$ je největší otevřená podmnožina A
- $\text{ext } A$ je největší otevřená množina disjunktní s A
- $x_0 \in \overline{A}$ právě když existují $x_n \in A, x_n \rightarrow x_0$
- $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
- Platí analogické tvrzení pro průnik?
- Je-li $F : X \rightarrow Y$ spojitý, je $F(\overline{A}) \subset \overline{F(A)}$.