

Invariantní valuace na konvexních tělesech

Jan Kotrbatý

24. dubna 2025

1 EUKLEIDOVSKÝ PROSTOR

V průběhu minikurzu budeme pracovat ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}^n$ se standardním *skalárním součinem*

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i, \quad (1)$$

kde $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$. Připomeňme, že skalární součin je pozitivně definitní bilineární symetrická forma. Konečně-dimenzionálnímu vektorovému prostoru se skalárním součinem se říká také Eukleidovský.

Skalární součin (1) indukuje *normu*

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}, \quad (2)$$

tedy zobrazení $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty)$ splňující pro každé $x, y \in \mathbb{R}^n$ a $\lambda \in \mathbb{R}$

$$(N1) \quad \|x\| = 0 \iff x = 0,$$

$$(N2) \quad \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|,$$

$$(N3) \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

Tyto vlastnosti vyjadřují kompatibilitu normy se základními strukturami na vektorovém prostoru (nulový vektor, násobení skalárem, sčítání vektorů). Vlastnost (N3) se nazývá trojúhelníková nerovnost. Připomeňme, že existují další normy na $\mathbb{R}^n$, ne všechny jsou však indukovány nějakým skalárním součinem. Dá se ukázat, že například $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$ nebo $\|x\|_\infty = \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\}$ splňují (N1) – (N3), ale nejsou indukovány žádným skalárním součinem ve smyslu rovnice (2).

Eukleidovská norma (2) dále indukuje (*Eukleidovskou*) *metriku*

$$\rho(x, y) = \|x - y\|, \quad (3)$$

tedy zobrazení $\rho : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty)$ splňující pro každé $x, y, z \in \mathbb{R}^n$

$$(M1) \quad \rho(x, y) = 0 \iff x = y,$$

$$(M2) \quad \rho(x, y) = \rho(y, x),$$

$$(M3) \quad \rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y).$$

Domácí úkol 1.1 (1 bod). Dokažte, že zobrazení ρ definované pomocí (3) je metrika pro libovolnou normu $\|\cdot\|$ na $\mathbb{R}^n$, tedy, že splňuje (M1) – (M3), pokud $\|\cdot\|$ splňuje (N1) – (N3).

Dále bude $\|\cdot\|$ označovat výhradně Eukleidovskou normu definovanou pomocí (2). Připomeňme na závěr, že geometricky udává $\|x\|$ délku vektoru $x \in \mathbb{R}^n$ (pokud ho uvažujeme jako šipku) nebo jeho vzdálenost od počátku (pokud ho uvažujeme jako bod). $\|x - y\|$ pak vyjadřuje vzdálenost bodů x a y .

2 KONVEXNÍ TĚLESA

Definice 2.1. Neprázdná podmnožina $K \subset \mathbb{R}^n$ se nazývá *konvexní těleso*, pokud je

- (i) *konvexní*, tedy pokud pro všechna $x, y \in K$ a $\lambda \in [0, 1]$ platí $\lambda x + (1 - \lambda)y \in K$;
- (ii) *omezená*, tedy pokud existuje $R > 0$ takové, že $\|x\| < R$ pro všechna $x \in K$;
- (iii) *uzavřená*, tedy pokud pro libovolnou posloupnost $\{x_n\}$ bodů z K konvergující k $x \in \mathbb{R}^n$ platí $x \in K$.

Množinu všech konvexních těles v $\mathbb{R}^n$ značíme $\mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$.

Poznámka 2.2.

- (a) Množina $\{\lambda x + (1 - \lambda)y \mid \lambda \in [0, 1]\}$ je úsečka spojující body x a y . Podmnožina vektorového prostoru je tedy konvexní pokud s každými dvěma svými body obsahuje i úsečku, která je spojuje.
- (b) Posloupnost $\{x_n\}$ v $\mathbb{R}^n$ konverguje k x (píšeme $x_n \rightarrow x, n \rightarrow \infty$), pokud pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\|x_n - x\| < \varepsilon$ pro všechna $n > n_0$.
- (c) Omezené uzavřené množiny v $\mathbb{R}^n$ se také nazývají *kompaktní*.

Příklad 2.3.

- (a) Základními příklady konvexních těles v $\mathbb{R}^2$ jsou (libovolný) trojúhelník či čtverec, v $\mathbb{R}^3$ pak krychle, jehlan nebo válec.
- (b) Každá jednobodová množina je zřejmě konvexním tělesem, tedy $\{x\} \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ pro každé $x \in \mathbb{R}^n$.
- (c) Konvexní tělesa na přímce jsou právě uzavřené intervaly, tedy $\mathcal{K}(\mathbb{R}) = \{[a, b] \mid a, b \in \mathbb{R}, a \leq b\}$.
- (d) Jednotková Eukleidovská koule

$$B^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}$$

je konvexním tělesem. Skutečně, zaprvé pro všechna $x, y \in B^n$ a $\lambda \in [0, 1]$ platí

$$\|\lambda x + (1 - \lambda)y\| \leq \|\lambda x\| + \|(1 - \lambda)y\| = \lambda \|x\| + (1 - \lambda) \|y\| = 1.$$

Zadruhé je B^n zřejmě omezená, položíme například $R = 2$. Zatřetí, uvažujme libovolnou konvergentní posloupnost $x_n \rightarrow x, \|x_n\| \leq 1$ a předpokládejme, že $\|x\| > 1$. Pak existuje $\varepsilon > 0$ splňující $\|x\| > 1 + \varepsilon$, a dále pak $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\|x - x_n\| < \varepsilon$ pro každé $n > n_0$. Pro taková n pak ale platí

$$1 + \varepsilon < \|x\| = \|x - x_n + x_n\| \leq \|x - x_n\| + \|x_n\| < \varepsilon + 1,$$

což je zřejmě spor, a proto $x \leq 1$.

Domácí úkol 2.4 (1 bod). Dokažte, že pokud $K, L \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ splňují $K \cap L \neq \emptyset$, pak platí $K \cap L \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$.

Množina konvexních těles je tedy uzavřená na průniky. Není však uzavřená na sjednocení, protože sjednocení konvexních množin zjevně nemusí být konvexní. Pokud je sjednocení konvexních těles konvexní, pak je toto sjednocení konvexním tělesem. V následující definici (a tvzení) si představíme další způsob, jak ze dvou konvexních těles vytvořit další konvexní těleso.

Definice 2.5 (Minkowského součet). Pro obecné podmnožiny $K, L \subset \mathbb{R}^n$ definujeme

$$K + L = \{x + y \mid x \in K, y \in L\}.$$

Tvrzení 2.6. Pokud $K, L \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$, pak $K + L \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$.

Důkaz. Zaprvé, buďte $x_1 + y_1, x_2 + y_2 \in K + L$ a $\lambda \in [0, 1]$. Pak

$$\lambda(x_1 + y_1) + (1 - \lambda)(x_2 + y_2) = [\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2] + [\lambda y_1 + (1 - \lambda)y_2] \in K + L,$$

protože K i L jsou konvexní, a tedy $K + L$ je konvexní.

Zadruhé, omezenost $K + L$ plyne snadno z omezenosti K a L a z trojúhelníkové nerovnosti.

Pro důkaz uzavřenosti uvažujme posloupnost $\{x_n + y_n\}$ bodů z $K + L$ konvergující k $z \in \mathbb{R}^n$. Chceme ukázat, že $z \in K + L$. Množina K je omezená, a proto je $\{x_n\}$ omezená posloupnost. Podle Bolzano-Weierstrassovy věty tedy existuje vybraná posloupnost $\{x_{n_k}\}$ konvergující k $x \in \mathbb{R}^n$. Z uzavřenosti K plyne $x \in K$. Podobně existuje posloupnost $\{y_{n_{k_i}}\}$ vybraná z $\{y_{n_k}\}$, konvergující k $y \in L$. Máme tedy $x_{n_{k_i}} + y_{n_{k_i}} \rightarrow x + y, i \rightarrow \infty$. Protože je tato poslední posloupnost vybraná z konvergentní posloupnosti $\{x_n + y_n\}$, musí mít stejnou limitu, a tedy platí, že $z = x + y \in K + L$. $\square$

Domácí úkol 2.7. Ukažte, že

$$K + L = \bigcup_{y \in L} K + \{y\}.$$

Definice 2.8. Pro $K \subset \mathbb{R}^n$ a $\lambda \in \mathbb{R}$ definujeme

$$\lambda K = \{\lambda x \mid x \in K\}.$$

Domácí úkol 2.9. Dokažte, že $\lambda K \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$, pokud je $K \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$.

Příklad 2.10.

- (a) Pokud je $L = \{y\}$ jednobodová množina, pak $K + y := K + \{y\}$ je posunutím tělesa K o vektor y . Speciálně platí $K + 0 = K$.
- (b) $-K := (-1)K$ je reflexí (převrácením) tělesa K podle počátku.
- (c) Bud'te $x, y \in \mathbb{R}^n$ a $K = [0, x] := \{\lambda x \mid \lambda \in [0, 1]\}$ úsečka spojující x s počátkem a podobně $L = [0, y]$. Pak $[0, x] + [0, y]$ je rovnoběžník s vrcholy $0, x, y, x + y$.
- (d) Pro $\varepsilon > 0$ je $\varepsilon B^n = \{x \mid \|x\| \leq \varepsilon\}$ Eukleidovská koule o poloměru ε .
- (e) $K + \varepsilon B^n$ je rovno ε -okolí tělesa $K \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$, tedy množině $\{z \in \mathbb{R}^n \mid \exists x \in K, \|x - z\| \leq \varepsilon\}$.

Konvexní tělesa tedy můžeme sčítat a násobit skalárem. Existuje dokonce nulový prvek (vzhledem ke sčítání), protože $K + 0 = K$. Množina K však *není* vektorovým prostorem, protože by muselo platit $K + (-K) = \{0\}$, což zjevně obecně není pravda (najděte protipříklad).

Eukleidovská metrika v $\mathbb{R}^n$ měří vzdálenost mezi dvěma body. Protože jednobodové množiny jsou speciálními příklady konvexních těles, umíme tedy měřit vzdálenost mezi těmito speciálními tělesy. Následující definice rozšiřuje pojem vzdálenosti na všechny dvojice konvexních těles.

Definice 2.11 (Hausdorffova metrika). Pro $K, L \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ položíme

$$d_H(K, L) = \min\{\varepsilon \geq 0 \mid K \subset L + \varepsilon B^n, L \subset K + \varepsilon B^n\}.$$

Tvrzení 2.12. d_H je metrika na $\mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$.

Důkaz. Máme zobrazení $d_H : \mathcal{K}(\mathbb{R}^n) \times \mathcal{K}(\mathbb{R}^n) \rightarrow [0, \infty)$. Musíme ukázat, že splňuje vlastnosti (M1) – (M3). Zprvu zřejmě platí $d_H(K, K) = 0$. Naopak, pokud je $d_H(K, L) = 0$, pak je

$$K \subset L + 0 \cdot B^n = L + 0 = L$$

a podobně $L \subset K$, tedy $K = L$. To dokazuje (M1). Dále zřejmě $(K, L) = d_H(L, K)$, což dokazuje (M2). Nakonec pro $K, L, M \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ máme $L \subset K + d_H(K, L)B^n$ a $M \subset L + d_H(L, M)B^n$. Dohromady tedy

$$M \subset K + d_H(K, L)B^n + d_H(L, M)B^n \subset K + [d_H(K, L) + d_H(L, M)]B^n.$$

Analogicky dostaneme

$$K \subset M + [d_H(K, L) + d_H(L, M)]B^n$$

a platí tedy $d_H(K, M) \leq d_H(K, L) + d_H(L, M)$, což je (M3). □

Dalším důležitým způsobem konstrukce konvexních těles je aplikace lineárních zobrazení.

Lemma 2.13. Bud'te $K \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ a $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ lineární zobrazení. Pak $\Phi(K) \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^m)$.

Domácí úkol 2.14 (2 body). Dokažte předchozí lemma.

3 VALUACE NA KONVEXNÍCH TĚLESECH

Definice 3.1. Zobrazení $\phi : \mathcal{K}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ se nazývá *valuace*, pokud pro všechna $K, L \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ taková, že $K \cup L \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$, platí

$$\phi(K \cup L) = \phi(K) + \phi(L) - \phi(K \cap L).$$

Poznámka 3.2. Snadno si uvědomíme, že pokud $K \cup L \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$, pak je $K \cap L \neq \emptyset$, a tedy $K \cap L \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ podle tvrzení dokázaném v domácím úkolu.

Definice 3.3. Valuace $\phi : \mathcal{K}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ se nazývá

- (a) *translačně invariantní*, pokud pro každé $K \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ a $x \in \mathbb{R}^n$ platí

$$\phi(K + x) = \phi(K);$$

- (b) *spojitá*, pokud pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ splňující

$$d_H(K, L) < \delta \implies |\phi(K) - \phi(L)| < \varepsilon.$$

Množinu všech translačně invariantních spojitých valuací na $\mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ značíme $\text{Val}(\mathbb{R}^n)$.

Příklad 3.4.

- (a) Tzv. *Eulerova charakteristika* χ , definovaná jako $\chi(K) = 1$, $K \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ je prvkem $\text{Val}(\mathbb{R}^n)$. Obecně každá konstantní valuace je zřejmě spojitá a translačně invariantní.
- (b) Funkce $\mathcal{L}(K) = |K \cap \mathbb{Z}^n|$ počítající počet bodů mřížky $\mathbb{Z}^n$ obsažených v $K \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ je valuace, která není ani spojitá, ani translačně invariantní.
- (c) Obsah rovinného konvexního tělesa $K \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^2)$ je prvkem $\text{Val}(\mathbb{R}^2)$, podobně objem prostorového konvexního tělesa $K \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^3)$ je prvkem $\text{Val}(\mathbb{R}^3)$.
- (d) Obecně n -dimenzionální objem vol_n konvexního tělesa $K \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ (tzv. *Lebesguova míra*, která bude rigorózně zkonstruována v Teorii míry ve druhém ročníku), je prvkem $\text{Val}(\mathbb{R}^n)$.
- (e) Buď $\pi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ ortogonální projekce. Pak zobrazení $\phi(K) = \text{vol}_k(\pi K)$, $K \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ je prvkem $\text{Val}(\mathbb{R}^n)$. Všimněme si, že $\pi K \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^k)$, protože π je lineární.

Domácí úkol 3.5. Ukažte, že $\text{Val}(\mathbb{R}^n)$ je vektorovým prostorem vzhledem ke sčítání a násobení skalárem definovaným pro každé $\phi, \psi \in \text{Val}(\mathbb{R}^n)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ a $K \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ jako

$$\begin{aligned}(\phi + \psi)(K) &:= \phi(K) + \psi(K), \\ (\lambda\phi)(K) &:= \lambda\phi(K).\end{aligned}$$

Věta 3.6. $\text{Val}(\mathbb{R}) = \text{LO}\{\chi, \text{vol}_1\}$.

Důkaz. Už víme, že $\chi, \text{vol}_1 \in \text{Val}(\mathbb{R})$, stačí tedy ukázat $\text{Val}(\mathbb{R}) \subset \text{LO}\{\chi, \text{vol}_1\}$. Vezměme si proto libovolnou valuaci $\phi \in \text{Val}(\mathbb{R})$ a položme

$$\begin{aligned}c &:= \phi(\{0\}) \in \mathbb{R}, \\ d &:= \phi([0, 1]) - c \in \mathbb{R}, \\ \psi &:= \phi - c \cdot \chi - d \cdot \text{vol}_1 \in \text{Val}(\mathbb{R}).\end{aligned}$$

Ukážeme v několika krocích, že ψ je nulová valuace. Tím bude dokázáno, že ϕ lze psát jako lineární kombinaci χ a vol_1 . Zaprvé, pro každé $x \in \mathbb{R}$ máme

$$\psi(\{x\}) = \psi(\{0\}) = \phi(\{0\}) - c\chi(\{0\}) - d\text{vol}_1(\{0\}) = c - c - 0 = 0,$$

kde jsme v prvním kroku využili translační invariance ψ . Zadruhé,

$$\psi([0, 1]) = \phi([0, 1]) - c\chi([0, 1]) - d\text{vol}_1([0, 1]) = d + c - c - d = 0.$$

Zatřetí, protože je ψ valuace, pro každé $N \in \mathbb{N}$ máme

$$\begin{aligned}\psi([0, N]) &= \psi([0, N-1] \cup [N-1, N]) \\ &= \psi([0, N-1]) + \psi([N-1, N]) - \psi(\{N-1\}) \\ &= \psi([0, N-1]) + \psi([0, 1]) \\ &= \psi([0, N-1]),\end{aligned}$$

kde jsme opět využili translační invariance. Indukcí pak snadno dostaneme

$$\psi([0, N]) = \psi([0, 1]) = 0.$$

Podobně pro každé $M, N \in \mathbb{N}$ máme

$$0 = \psi([0, N]) = \psi([0, \frac{N}{M}]) + \psi([\frac{N}{M}, \frac{2N}{M}]) + \cdots + \psi([\frac{(M-1)N}{M}, N]) = M\psi([0, \frac{N}{M}]),$$

a tedy $\psi([0, q]) = 0$ pro každé $q \in \mathbb{Q}$, $q > 0$. Konečně, pro každé $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$ existuje posloupnost pozitivních racionálních čísel $q_n \rightarrow x$. Pak zřejmě platí $d_H([0, q_n], [0, x]) \rightarrow 0$ a ze spojitosti ψ dostáváme

$$\psi([0, x]) = \lim_n \psi([0, q_n]) = \lim_n 0 = 0,$$

což spolu s translační invariantností implikuje $\psi([a, b]) = 0$ pro každá $a < b$. □

Definice 3.7. Valuace $\phi : \mathcal{K}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ se nazývá k -homogenní, pokud pro každé $K \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ a $\lambda > 0$ platí

$$\phi(\lambda K) = \lambda^k \phi(K).$$

Podprostor všech k -homogenních valuací v $\text{Val}(\mathbb{R}^n)$ značíme $\text{Val}_k(\mathbb{R}^n)$.

Příklad 3.8.

- (a) $\chi \in \text{Val}_0(\mathbb{R}^n)$.

- (b) $\text{vol}_n \in \text{Val}_n(\mathbb{R}^n)$.
(c) Obvod rovinných konvexních těles je prvkem $\text{Val}_1(\mathbb{R}^2)$.
(d) Povrch prostorových konvexních těles je prvkem $\text{Val}_2(\mathbb{R}^3)$.

Bez důkazu si uvedeme následující důležitou větu.

Věta 3.9 (McMullen, 1977).

$$\text{Val}(\mathbb{R}^n) = \bigoplus_{k=0}^n \text{Val}_k(\mathbb{R}^n).$$

Domácí úkol 3.10 (1 bod). Dokaže direktnost McMullenova rozkladu v předchozí větě.

Tvrzení 3.11. $\text{Val}_0(\mathbb{R}^n) = \text{LO}\{\chi\}$.

Důkaz. Stačí ukázat, že libovolná valuace $\phi \in \text{Val}_0(\mathbb{R}^n)$ je konstantní. Předpokládejme, že $\phi(K) \neq \phi(L)$ pro nějaká tělesa $K, L \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$. Položme $K_n := \frac{1}{n}K$ a $L_n := \frac{1}{n}L$. Protože $d_H(K_n, \{0\}) \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$, ze spojitosti ϕ platí $\phi(K_n) \rightarrow \phi(\{0\})$. Protože ϕ je 0-homogenní, platí $\phi(K_n) = \phi(K)$, a tedy $\phi(K) = \phi(\{0\})$. Stejně se ukáže $\phi(L) = \phi(\{0\})$, což je ve sporu s předpokladem $\phi(K) \neq \phi(L)$. $\square$

Podobné tvrzení platí pro podprostor na opačném kraji McMullenova rozkladu, v porovnání s předchozím tvrzením je však mnohem těžší dokázat, a proto ho uvádíme opět bez důkazu.

Věta 3.12 (Hadwiger, 1957). $\text{Val}_n(\mathbb{R}^n) = \text{LO}\{\text{vol}_n\}$.

Poznámka 3.13. Máme tedy $\dim \text{Val}_0(\mathbb{R}^n) = \dim \text{Val}_n(\mathbb{R}^n) = 1$. V kontrastu s tím platí (opět bez důkazu)

$$\dim \text{Val}_k(\mathbb{R}^n) = \infty.$$

Speciálně tedy $\dim \text{Val}(\mathbb{R}^n) = \infty$ pro $n \geq 2$.

Lemma 3.14. Bud' $A \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$. Pak $\phi(K) = \text{vol}_n(K + A), K \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ je prvkem $\text{Val}(\mathbb{R}^n)$.

Důkaz. Translační invariance je zřejmě splněna díky translační invarianci vol_n . Spojitost se snadno dostane ze spojitosti valuace vol_n a ze spojitosti Minkowského součtu (bez důkazu). To, že ϕ je valuace plyne ihned z identit dokázaných v následujícím domácím úkolu. $\square$

Domácí úkol 3.15 (2 body). Dokažte, že pro každá $K, L, A \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ platí

$$(K \cap L) + A = (K + A) \cap (L + A)$$

a pokud $K \cup L \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$, pak také

$$(K \cup L) + A = (K + A) \cup (L + A).$$

Poznámka 3.16. Důležitým důsledkem McMullenova rozkladu je, že prostor $\text{Val}(\mathbb{R}^n)$ je normovaný. Skutečně, dá se ukázat, že

$$\|\phi\| = \sup_{K \subset B^n} |\phi(K)|$$

definuje normu na $\text{Val}(\mathbb{R}^n)$, viz. také následující domácí úkol.

Domácí úkol 3.17. Ukažte pomocí Věty 3.9, že $\|\phi\| = 0$ implikuje $\phi = 0$.

Poznámka 3.18 (McMullenova doměnka a Aleskerova algebraická teorie valuací). V roce 1980 publikoval P. McMullen doměnku, že lineární libovolné $\phi \in \text{Val}(\mathbb{R}^n)$ lze libovolně přesně aproximovat lineární kombinací valuací z Lemmatu 3.14. Přesněji, že pro každé $\varepsilon > 0$ existují $A_1, \dots, A_N \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ a $\lambda_1, \dots, \lambda_N \in \mathbb{R}$ takové, že

$$\left\| \phi - \sum_{i=1}^N \lambda_i \text{vol}_n(\cdot + A_i) \right\| < \varepsilon.$$

O 21 let později, v roce 2001, byla tato doměnka potvrzena S. Aleskerem. Ten ve skutečnosti dokázal ještě mnohem silnější tvrzení a jeho důkaz byl na počátku celé řady dalších významných výsledků, které výrazně přispěly k pochopení prostoru spojitých translačně invariantních valuací. Mezi nejvýznamější

důsledky Aleskerova důkazu patří objev produktu (násobení) na $\text{Val}(\mathbb{R}^n)$. Ten lze snadno definovat na valuacích typu $\text{vol}_n(\cdot + A)$ jako

$$\text{vol}_n(\cdot + A_1) * \text{vol}_n(\cdot + A_2) = \text{vol}_n(\cdot + A_1 + A_2),$$

jeho existence je však velice netriviální a plyne právě z Aleskerovy práce.

4 INVARIANTNÍ VALUACE

Důsledek 4.1. Bud' $K \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$. Pak funkce $f(\varepsilon) = \text{vol}_n(K + \varepsilon B^n)$, tedy objem ε -okolí tělesa K , je polynom v $\varepsilon > 0$.

Důkaz. Uvažujme funkci $\phi(L) = \text{vol}(K + L)$, $L \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$. Podle Lemmatu 3.14 je $\phi \in \text{Val}(\mathbb{R}^n)$. Podle Věty 3.9 tedy existují $\phi_i \in \text{Val}_i(\mathbb{R}^n)$, $i = 0, \dots, n$, spňující $\phi = \phi_0 + \dots + \phi_n$. Proto je

$$\text{vol}_n(K + \varepsilon B^n) = \phi(\varepsilon B^n) = \sum_{i=0}^n \phi_i(\varepsilon B^n) = \sum_{i=0}^n \varepsilon^i \phi_i(B^n)$$

polynom v ε . □

Příklad 4.2. Pro $K \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^2)$ máme

$$\text{vol}_2(K + \varepsilon B^2) = \text{vol}(K) + \text{per}(K)\varepsilon + \pi\varepsilon^2,$$

kde $\text{per}(K)$ značí obvod K .

Definice 4.3. Bud' $K \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ a polořme

$$\text{vol}_n(K + \varepsilon B^n) = \sum_{k=0}^n V_k(K) \varepsilon^{n-k}. \quad (4)$$

Koeficienty $V_0(K), \dots, V_n(K)$ se nazývají *vnitřní objemy* tělesa K .

Poznámka 4.4.

- (a) V literatuře se většinou vnitřními objemy nazývají čísla $\frac{V_k(K)}{\text{vol}_{n-k}(B^{n-k})}$, $k = 0, \dots, n$, jsou tedy přeškálované objemem jednotkové $(n - k)$ -dimenzionální koule.
- (b) Rovnice (4) se nazývá *Steinerova formule* podle švýcarského matematika Jakoba Steinera, který ji dokázal pro $n \leq 3$ již v devatenáctém století. V plné obecnosti byla pak dokázána Hermannem Minkowskim na přelomu devatenáctého a dvacátého století, tedy dávno předtím, než Peter McMullen dokázal Větu 3.9, která, jak jsme viděli, je mnohem obecnější.

Příklad 4.5.

- (a) Provedeme-li v (4) limitu $\varepsilon \rightarrow 0$, dostaneme snadno

$$V_n(K) = \text{vol}_n(K).$$

- (b) Vynásobíme-li (4) ε^{-n} , dostaneme na levé straně $\varepsilon^{-n} \text{vol}_n(K + \varepsilon B^n) = \text{vol}_n(\varepsilon^{-n} K + B^n)$. Provedeme-li pak limitu $\varepsilon \rightarrow \infty$, dostaneme

$$V_0(K) = \text{vol}_n(B^n).$$

Všimněme si, že V_0 je tedy konstanta nezávislá na K .

- (c) Porovnáním s Příkladem 4.2 dostáváme, že v dimenzi $n = 2$ platí $V_1(K) = \text{per}(K)$.

Vidíme, že tedy alespoň v těchto speciálních případech jsou vnitřní objemy, jakořto funkce na konvexních tělesech, translačně invariantní valuace. Ve skutečnosti platí následující

Tvrzení 4.6. Pro každé $k = 0, \dots, n$ platí $V_k \in \text{Val}_k(\mathbb{R}^n)$.

Důkaz. Dokážeme, že vnitřní objemy jsou valuace. Podle Lemmatu 3.14 platí pro každé $K, L \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$

a každé $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned}
0 &= \text{vol}_n((K \cup L) + \varepsilon B^n) + \text{vol}_n((K \cap L) + \varepsilon B^n) - \text{vol}_n(K + \varepsilon B^n) - \text{vol}_n(L + \varepsilon B^n) \\
&= \sum_{k=0}^n V_k(K \cup L) \varepsilon^{n-k} + \sum_{k=0}^n V_k(K \cap L) \varepsilon^{n-k} - \sum_{k=0}^n V_k(K) \varepsilon^{n-k} - \sum_{k=0}^n V_k(L) \varepsilon^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^n [V_k(K \cup L) + V_k(K \cap L) - V_k(K) - V_k(L)] \varepsilon^{n-k}.
\end{aligned}$$

Tento polynom musí být tedy nutně nulovým polynomem, jinak řečeno, má nulové koeficienty, a tedy platí

$$V_k(K \cup L) + V_k(K \cap L) - V_k(K) - V_k(L) = 0, \quad k = 0, \dots, n.$$

Translační invariance a spojitost se ukáží podobně. Konečně, k -homogenita valuace V_k plyne z toho, že pro každé $\lambda > 0$ je

$$\begin{aligned}
0 &= \text{vol}_n(\lambda(K + \varepsilon B^n)) - \lambda^n \text{vol}_n(K + \varepsilon B^n) \\
&= \text{vol}_n(\lambda K + \lambda \varepsilon B^n) - \lambda^n \text{vol}_n(K + \varepsilon B^n) \\
&= \sum_{k=0}^n V_k(\lambda K) \lambda^{n-k} \varepsilon^{n-k} - \lambda^n \sum_{k=0}^n V_k(K) \varepsilon^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^n [V_k(\lambda K) - \lambda^k V_k(K)] \lambda^{n-k} \varepsilon^{n-k}
\end{aligned}$$

je opět nulový polynom v $\varepsilon > 0$. □

Objem vol_n není invariantní pouze vůči translacím, ale také vůči všem rotacím. Připomeňme, že rotací se nazývá lineární zobrazení $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ zachovávající Eukleidovskou normu a že množina všech rotací tvoří grupu, kterou značíme $O(n)$.

Definice 4.7. Valuace $\phi : \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ se nazývá *rotačně invariantní*, pokud pro všechna tělesa $K \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ a všechny rotace $\Phi \in O(n)$ platí

$$\phi(\Phi K) = \phi(K).$$

Podprostor všech rotačně invariantních valuací ve $\text{Val}(\mathbb{R}^n)$ značíme $\text{Val}(\mathbb{R}^n)^{O(n)}$.

Poznámka 4.8. Připomeňme, že podle Lemmatu 2.13 je $\Phi K \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$.

Pak tedy platí následující tvrzení, které je opět intuitivně jasné v nízkých dimenzích (obsah v $\mathbb{R}^2$, objem v $\mathbb{R}^3$), ale rigorózně bude dokázáno až v rámci teorie míry, kde bude zavedené Lebesguova míra.

Věta 4.9. $\text{vol}_n \in \text{Val}(\mathbb{R}^n)^{O(n)}$.

Úplně stejným způsobem jako v důkazu Tvrzení 4.6 implikuje rotační invariance objemu vol_n rotační invarianci všech ostatních vnitřních objemů. Platí tedy následující

Důsledek 4.10. $V_k \in \text{Val}(\mathbb{R}^n)^{O(n)}$.

Je pozoruhodné, že kromě vnitřních objemů (a jejich libovolných lineárních kombinací) již žádné další spojitě translačně a rotačně invariantní valuace neexistují. Platí následující důležitá

Věta 4.11 (Hadwiger, 1957). $\text{Val}(\mathbb{R}^n)^{O(n)} = \text{LO}\{V_0, \dots, V_n\}$.

LITERATURA

- [1] P. Gruber, *Convex and Discrete Geometry*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2007.
- [2] R. Schneider, *Convex Bodies: The Brunn–Minkowski Theory*, Cambridge University Press, 2014.