

Oktonionická geometrie

Jan Kotrbatý

(verze z 14. května 2026)

ÚVOD

1 NORMOVANÉ ALGEBRY

Všechny vektorové prostory budeme uvažovat nad tělesem reálných čísel.

Definice 1.1. Vektorový prostor A spolu s bilineárním zobrazením $m : A \times A \rightarrow A$ nazýváme *algebrou*. Zobrazení m pak nazýváme *násobením* nebo *produktem*. Pro $x, z \in A$ píšeme $m(x, y) = x \cdot y = xy$. Budeme předpokládat, že algebra vždy obsahuje *jednotku*, tedy prvek $1 \in A$ splňující $1 \cdot x = x \cdot 1 = x$ pro každé $x \in A$.

Poznámka 1.2. Jednotka, pokud existuje, je právě jedna. Skutečně, pro každé jednotky $1, 1' \in A$ platí

$$1 = 1 \cdot 1' = 1'.$$

Všimněme si, že nepožadujeme, aby násobení bylo komutativní nebo asociativní. Naopak, právě algebry, které tyto vlastnosti nemají, nás budou nejvíce zajímat.

Příklad 1.3. Následující algebry již známe:

(a) \mathbb{R} se standardním násobením.

(b) $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ s násobením komplexních čísel, kde $1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ je jednotka a $i := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ splňuje $i^2 = -1$. Pro všechna $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tedy máme

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac - bd \\ bc + ad \end{pmatrix}. \quad (1)$$

(c) $\mathbb{R}^4 = \mathbb{H}$ s násobením kvaternionů, které je určeno požadavkem asociativity a relací

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1, \quad (2)$$

kde $(1, i, j, k)$ je (standardní) báze \mathbb{R}^4 .

(d) $\mathbb{R}^{n \times n}$ s maticovým násobením.

Domácí úkol 1.4. Ukažte, že asociativita a (2) již definují násobení na \mathbb{H} , tedy že $ij = -ji = k$, atd.

Přestože zde budeme uvažovat pouze algebry konečné dimenze, zmiňme, že existují i nekonečně-dimenzionální algebry, např. prostor všech polynomů se standardním produktem polynomů.

Speciálně nás budou zajímat algebry, na kterých lze měřit velikost vektorů a tato velikost je kompatibilní s násobením. Takovým algebrám se říká *normované*.

Definice 1.5. Bud' V vektorový prostor. Zobrazení $\|\cdot\| : V \rightarrow [0, \infty)$ nazýváme *normou*, pokud pro každé $x, y \in \mathbb{R}^n$ a $\lambda \in \mathbb{R}$ platí

$$(N1) \quad \|x\| = 0 \iff x = 0,$$

$$(N2) \quad \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|,$$

$$(N3) \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

Příklad 1.6. Standardní (Eukleidovská) norma na \mathbb{R}^n je definována jako

$$\|x\|_2 := \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}, \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n. \quad (3)$$

Na \mathbb{R}^n však existují další normy, např. se dá ukázat, že pro každé $p > 0$ máme normu

$$\|x\|_p := \left(\sum_{i=1}^n x_i^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Definice 1.7. Normovaná algebra je algebra A s normou $\|\cdot\|$ takovou, že pro každá $x, y \in A$ platí

$$\|xy\| = \|x\| \|y\|. \quad (4)$$

Poznámka 1.8. V normované algebře zřejmě nutně platí

- (a) $\|1\| = 1$,
- (b) $xy = 0 \iff x = 0$ nebo $y = 0$.

Příklad 1.9.

- (a) \mathbb{R}, \mathbb{C} a \mathbb{H} jsou normované algebry vzhledem k Eukleidovské normě na \mathbb{R}^n pro $n = 1, 2, 4$.
- (b) Algebra $\mathbb{R}^{n \times n}$ pro $n \geq 2$ není normovaná vzhledem k Eukleidovské normě na \mathbb{R}^{n^2} , protože zřejmě nemá vlastnosti z Poznámky 1.8.

Věta 1.10 (Hurwitz). Normované algebry existují pouze v dimenzích 1, 2, 4 a 8. Navíc v každé této dimenzi existuje (až na isomorfismus) právě jedna takové algebra.

Definice 1.11. 8-dimenzionální normovanou algebru značíme \mathbb{O} a nazýváme algebrou oktonionů.

Explicitně lze oktonionické násobení zadat např. následujícím způsobem. Jako vektorový prostor máme $\mathbb{O} = \mathbb{R}^8$ se standardní bází (e_0, \dots, e_7) . Násobení pak definujeme pomocí následujících pravidel:

- (i) e_0 je jednotka, značíme $e_0 = 1$;
- (ii) $e_i^2 = -1$ pro $i = 1, \dots, 7$;
- (iii) $e_i e_j = -e_j e_i$ pro $i, j = 1, \dots, 7$ a $i \neq j$;
- (iv) $e_1 e_2 = e_4, e_2 e_4 = e_1, e_4 e_1 = e_2,$
 $e_2 e_3 = e_5, e_3 e_5 = e_2, e_5 e_2 = e_3,$
 atd., což si lze snadno zapamatovat pomocí tabulky

1	2	4
2	3	5
3	4	6
4	5	7
5	6	1
6	7	2
7	1	3

ve které každé číslo dostaneme tak, že k číslu nad ním přičteme 1 modulo 7.

Domácí úkol 1.12. Ukažte, že \mathbb{O} je normovaná algebra vzhledem k Eukleidovské normě na \mathbb{R}^8 , tedy že pro každé

$$x = \sum_{i=0}^7 x_i e_i, y = \sum_{i=0}^7 y_i e_i \in \mathbb{O}$$

platí

$$\|xy\|^2 = \left(\sum_{i=0}^7 x_i^2 \right) \left(\sum_{i=0}^7 y_i^2 \right).$$

Všimněme si, že $\mathbb{R} \subset \mathbb{C} \subset \mathbb{H} \subset \mathbb{O}$, např.

$$\text{LO}\{1\} \subset \text{LO}\{1, e_1\} \subset \text{LO}\{1, e_1, e_2, e_4\} \subset \mathbb{O}.$$

Speciálně platí, že oktoniony jsou nekomutativní. Ve skutečnosti nejsou ani asociativní! V následující kapitole uvidíme, že však stále splňují alespoň určitou slabší formu asociativity a také více konceptuální pohled na to, proč oktoniony nejsou asociativní.

Domácí úkol 1.13. Nalezněte $x, y, z \in \mathbb{O}$ splňující $(xy)z \neq x(yz)$.

Poznámka 1.14. Platí dokonce, že pokud má konečně-dimenzionální algebra A vlastnost z Poznámky 1.8(b), pak nutně $\dim A \in \{1, 2, 4, 8\}$. Takových algeber je však mnohem více a toto tvrzení je mnohem

hlubší výsledek než Hurwitzova věta.

2 CAYLEYHO–DICKSONOVA KONSTRUKCE

Definice 2.1. Algebra je *alternativní*, pokud každá její podalgebra generovaná maximálně dvěma elementy je asociativní.

Věta 2.2 (Artin). Algebra A je alternativní právě tehdy, když pro každá $x, y \in A$ platí

$$(xx)y = x(xy) \quad \text{a} \quad x(yy) = (xy)y. \quad (5)$$

Poznámka 2.3. Všimněme si, že (5) implikuje také

$$x(yx) = (xy)x.$$

Skutečně, podle (5) máme

$$\begin{aligned} 0 &= (x+y)[(x+y)x] - [(x+y)(x+y)]x \\ &= x(xx) + x(yx) + y(xx) + y(yx) - (xx)x - (xy)x - (yx)x - (yy)x \\ &= x(yx) - (xy)x. \end{aligned}$$

Vraťme se nyní na chvíli ke komplexním číslům. Kromě produktu (1) máme na $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ také operaci (komplexního) sdružení

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} a \\ -b \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Komplexní sdružení je lineární isomorfismus na \mathbb{R}^2 a pro $x, y \in \mathbb{C}$ splňuje $(x^*)^* = x$ a $(xy)^* = y^*x^*$. Na \mathbb{R} formálně máme také takovou operaci, pokud položíme $a^* := a$. Pokud navíc využijeme komutativity reálných čísel, můžeme základní operace s komplexními čísly (1) a (6) zapsat jako

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac - db^* \\ cb + a^*d \end{pmatrix} \quad (7)$$

a

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} a^* \\ -b \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Pokud bychom nyní uvažovali $a, b, c, d \in \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$, definují nám (7) a (8) produkt a sdružení na \mathbb{R}^4 . Snadno se nahlédne, že (7) pak není nic jiného než produkt kvaternionů a (8) kvaternionické sdružení. Pokud bychom pokračovali dále s $a, b, c, d \in \mathbb{H}$ dostali bychom algebru oktonionů. Tomuto procesu, při kterém v každém kroku dostaneme algebru dvojnásobné dimenze se říká *Cayleyho–Dicksonova konstrukce*.

Definice 2.4.

(a) **-algebra* je algebra A spolu s lineárním zobrazením $*$: $A \rightarrow A$, zvaným *sdružení*, které pro každá $x, y \in A$ splňuje

$$(x^*)^* = x \quad \text{a} \quad (xy)^* = y^*x^*.$$

(b) Říkáme, že **-algebra* je *reálná*, pokud pro každé $x \in A$ platí $x^* = x$.

(c) Říkáme, že **-algebra* je *pěkně normovaná*, pokud pro každé $0 \neq x \in A$ platí

$$xx^* = x^*x > 0 \quad \text{a} \quad x + x^* \in \mathbb{R}.$$

V tomto případě pak pro $x \in A$ definujeme

$$\begin{aligned} \|x\| &= \sqrt{x^*x}, \\ \operatorname{Re}(x) &= \frac{1}{2}(x + x^*), \\ \operatorname{Im}(x) &= \frac{1}{2}(x - x^*). \end{aligned} \quad (9)$$

Poznámka 2.5.

(a) Upřesněme, že $\mathbb{R} = \operatorname{LO}\{1\}$ a že $a > 0$ znamená $a \in \operatorname{LO}\{1\}$ a $a = \alpha 1$ pro nějaké $\alpha > 0$.

(b) Zřejmě platí $\|x^*\| = \|x\|$.

(c) Všimněme si, že $x = \operatorname{Re}(x) + \operatorname{Im}(x)$ a že $x = 0 \iff \operatorname{Re}(x) = \operatorname{Im}(x) = 0$.

Tvrzení 2.6. Pokud A je pěkně normovaná alternativní $*$ -algebra, pak definuje normu a A je normovaná algebra ve smyslu Definice (1.7).

Důkaz. Dokážeme nejprve, že zobrazení $\|\cdot\|$ má vlastnost (4). Díky alternativitě máme pro $x, y \in A$

$$\|xy\|^2 = (xy) * (xy) = (y^*x^*)(xy) = y^*(x^*x)y = (x^*x)(y^*y) = \|x\|^2 \|y\|^2,$$

protože $x = \operatorname{Re}(x) \cdot \operatorname{Im}(x)^0 + \operatorname{Im}(x)$ a podobně pro y , a x, y tedy leží v podalgebře A generované dvěma elementy $\operatorname{Im}(x), \operatorname{Im}(y)$.

Dále si všimněme, že $\|x\|^2 = \operatorname{Re}(x)^2 - \operatorname{Im}(x)^2$ a že $\operatorname{Im}(x)^2 = \frac{1}{4}(x - x^*)^2 = -\frac{1}{4}(x - x^*)(x - x^*)^* \leq 0$. Odtud ihned plyne, že $\|x\| = 0 \iff x = 0$, a také

$$\operatorname{Re}(x) \leq \|x\|.$$

S využitím této nerovnosti a předchozího kroku pak pro každé $x, y \in A$ máme

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= (x + y)^*(x + y) \\ &= x^*x + y^*y + (x^*y + y^*x) \\ &= \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\operatorname{Re}(x^*y) \\ &\leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|(\|x^*y\|) \\ &= \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\| \|y\| \\ &= (\|x\| + \|y\|)^2. \end{aligned}$$

Nakonec pro každé $\lambda \in \mathbb{R}$ a $x \in A$ zřejmě platí $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$. □

Věta 2.7. Bud' A $*$ -algebra a uvažujme $*$ -algebru $A' := A \times A$ s násobením definovaným pomocí (7) a sdružením definovaným pomocí (8), kde $a, b, c, d \in A$. Potom platí následující tvrzení:

(a) A je pěkně normovaná $\iff A'$ je pěkně normovaná.

(b) A' není reálná.

(c) A je reálná (a tedy komutativní) $\iff A'$ je komutativní.

(d) A je komutativní a asociativní $\iff A'$ je asociativní.

(e) A je asociativní a pěkně normovaná $\iff A'$ je alternativní a pěkně normovaná.

Poznámka 2.8. Je-li $1 \in A$ jednotka v A , pak $\begin{pmatrix} 1 & \\ & 0 \end{pmatrix} \in A'$ je jednotka v A' .

Důkaz. (a) Pokud je A pěkně normovaná, pak pro každé $x = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in A'$ platí

$$x + x^* = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a^* \\ -b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + a^* \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}.$$

Pokud je navíc $x \neq 0$, pak je podobně

$$x^*x = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}^* \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^* \\ -b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^*a + bb^* \\ 0 \end{pmatrix} > 0,$$

$$xx^* = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^* \\ -b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa^* + bb^* \\ 0 \end{pmatrix} > 0$$

a zřejmě také $x^*x = xx^*$. Pokud je naopak A' pěkně normovaná, pak z těchto úvah snadno plyne, že pro každé $a \in A$ platí $a + a^* \in \mathbb{R}$, resp. $a^*a = aa^* > 0$ pokud $a \neq 0$.

(b) Pokud by A' byla reálná, pak by speciálně platilo

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \implies 1 = 0,$$

což je spor.

(c) Pokud je A reálná, pak pro všechna $a, b \in A$ platí

$$ab = (ab)^* = b^*a^* = ba,$$

a A je tedy komutativní. Dále pro všechna $x = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \in A'$ máme

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac - db^* \\ cb + a^*d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ca - bd^* \\ ad + c^*b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

Naopak, pokud je A' komutativní, pak stejnou úvahou ve speciálním případě $b = c = 0$ a $d = 1$ dostaneme $a^* = a$ pro $a \in A$. \square

Domácí úkol 2.9. *Dokažte část (d) Věty 2.7.*

LITERATURA

[1] J. C. Baez, *The octonions*, Bulletin of the American Mathematical Society **39** (2001), no. 2, 145–205.