

Valuace na konvexních tělesech (NMAG266)

Jan Kotrbatý

(verze z 2. března 2026)

OBSAH

1	Základy konvexní geometrie	2
1.1	Konvexní množiny	2
1.2	Konvexní tělesa	3
1.3	Hausdorffova metrika	4
1.4	Opěrná funkce	5
1.5	Polytopy	6
2	Valuace na konvexních tělesech	8
2.1	Definice a základní příklady	8
2.2	Princip inkluze a exkluze	9

ÚVOD

Je dobře známo, že každé dva rovinné mnohoúhelníky (polygony) o stejném obsahu lze převést jeden na druhý tak, že jeden „rozstříháme“ na konečný počet menších mnohoúhelníků a ty pak vhodně přesuneme a bez překryvů slepíme, abychom opět dostali mnohoúhelník. Říkáme také, že mnohoúhelníky o stejném obsahu jsou „nůžkově ekvivalentní“.

Otázka, jestli nůžková ekvivalence existuje i ve vyšších dimenzích, tedy mezi trojrozměrnými mnohostěny (případně vícerozměrnými *polytopy*) stejného objemu, byla svého času tak aktuální, že ji David Hilbert v roce 1900 zařadil na svůj slavný seznam 23 velkých problémů pro další století. Tento (třetí) Hilbertův problém byl jako jeden z prvních vyřešen hned roku 1901 Hilbertovým studentem Maxem Dehnem, který ukázal, že takové tvrzení obecně neplatí, přesněji že krychle a čtyřstěn o stejném objemu nejsou nůžkově ekvivalentní. Dehn tuto skutečnost demonstroval konstrukcí funkce ϕ na množině mnohostěnů, která pro každý libovolně „rozstříhaný“ mnohostěn $M = M_1 \cup \dots \cup M_k$ splňuje

$$\phi(M) = \phi(M_1) + \dots + \phi(M_k).$$

Takovýmto funkcím dnes v konvexní geometrii říkáme *valuace* (přesněji prostě *valuace*). Protože je Dehnova valuace zároveň invariantní vůči všem posunutím a prostorovým rotacím, musela by nabývat, v případě že by krychle a čtyřstěn o stejném objemu byly nůžkově ekvivalentní, na obou těchto tělesech stejné hodnoty. Jednoduchým výpočtem se však ukáže, že se tyto hodnoty liší. Konstrukce tohoto tzv. *Dehnova invariantu* je velmi pěkně vysvětlena např. v této epizodě kanálu Numberphile:

<https://www.youtube.com/watch?v=eYfpSaxGakI>.

V průběhu 20. století se studium valuací stalo důležitou součástí konvexní geometrie s mnoha paralelními výzkumnými směry. I v současnosti je tato oblast matematiky velmi aktivní a přes množství hlubokých strukturálních výsledků, kterých bylo v průběhu let dosaženo a které mají často přesah mimo valuace a konvexní geometrii obecně, nabízí mnoho nevyřešených problémů.

V naší přednášce se budeme podrobněji zabývat především klasickými výsledky, které se později (v průběhu posledních 25 let) staly základem pro moderní, tzv. *algebraickou* teorii valuací. Tato teorie studuje algebraické struktury na valuačních prostorech (příkladem je násobení valuací) a jejich aplikace,

zejména v integrální geometrii a ve studiu geometrických nerovností. Přesněji si dokážeme McMullerovu větu o rozkladu prostoru spojitých translačně invariantních valuací a dále Hadwigerovu větu o charakterizaci podprostoru rotačně invariantních valuací. Také si ukážeme, jak z Hadwigerovy věty plynou klasické tzv. *kinematické formule* z integrální geometrie, které ve speciálním případě určují s jakou pravděpodobností se protnou dva náhodně umístěné (konvexní) geometrické objekty. Bez větších podrobností si také ukážeme, jak se definuje násobení valuací a jak toto násobení souvisí s kinematickými formulami a s geometrickými nerovnostmi, například isoperimetrickou nerovností a dalšími nerovnostmi dokázanými v kurzu Konvexní tělesa.

Obsah přednášky volně navazuje na kurz Konvexní tělesa (dále jen KT) v tom smyslu, že využívá některá tvrzení dokázaná v rámci tohoto kurzu. Předchozí absolvování kurzu je tedy výhodou, ale určitě ne nutnou prerekvizitou. Poznámky prof. Rataje jsou dostupné online na

https://www.karlin.mff.cuni.cz/~rataj/konv_telesa/prednaska_KT_2025.pdf.

Naše přednáška částečně vychází z přednášky *Konvex- und Integralgeometrie* vyučované v roce 2022 na Goethe-Universität Frankfurt prof. Bernigem, kterému tímto děkujeme za poskytnutí poznámek, a využívá také standardních monografií [1–4], které případně doporučujeme pro další studium.

1 ZÁKLADY KONVEXNÍ GEOMETRIE

1.1 KONVEXNÍ MNOŽINY

Definice 1.1. Množina $K \subset \mathbb{R}^n$ se nazývá *konvexní*, pokud pro všechna $x, y \in K$ a $\lambda \in [0, 1]$ platí $\lambda x + (1 - \lambda)y \in K$.

Průnik libovolného systému konvexních množin je konvexní, což zřejmě neplatí pro sjednocení (ani dvou množin). Platí však, že pokud $K_1 \subset K_2 \subset \dots$ jsou konvexní množiny, pak $\bigcup_i K_i$ je také konvexní.

Bod $\lambda x + (1 - \lambda)y \in \mathbb{R}^n$, kde $\lambda \in [0, 1]$, se nazývá *konvexní kombinací* bodů x a y . Obecněji, lineární kombinace $\sum_{i=1}^N \lambda_i x_i$ bodů $x_1, \dots, x_N \in \mathbb{R}^n$ se nazývá *konvexní kombinací*, pokud platí $\lambda_i \in [0, 1]$ a $\sum_{i=1}^N \lambda_i = 1$.

Definice 1.2. Bud' $X \subset \mathbb{R}^n$. Nejmenší konvexní množinu obsahující X , přesněji průnik všech konvexních podmnožin $\mathbb{R}^n$ obsahujících X , nazýváme *konvexním obalem* X a značíme $\text{conv}(X)$.

Speciálně pro $K \subset \mathbb{R}^n$ konvexní je $\text{conv}(K) = K$. Snadno se ukáže (viz. také KT), že konvexní obal obecné množiny je roven množině všech konvexních kombinací:

Tvrzení 1.3. Pro $X \subset \mathbb{R}^n$ platí

$$\text{conv}(X) = \left\{ \sum_{i=1}^N \lambda_i x_i \mid x_i \in X, \lambda_i \in [0, 1], \sum_{i=1}^N \lambda_i = 1 \right\}.$$

Důkaz. Označme množinu na pravé straně M . Zřejmě platí, že $X \subset M$: Stačí vzít $N = 1$ a $\lambda_1 = 1$. Zároveň je okamžitě vidět, že M je konvexní. Proto tedy $\text{conv}(X) \subset M$.

Pro důkaz opačné inkluze si vezmeme libovolnou konvexní množinu $K \supset X$. Indukcí na $N \in \mathbb{N}$ ukážeme, že pro každá $x_1, \dots, x_N \in X$ a $\lambda_1, \dots, \lambda_N \in [0, 1]$ splňující $\sum_i \lambda_i = 1$ platí $\sum_i \lambda_i x_i \in K$. Pro $N = 1$ je toto tvrzení triviální, předpokládejme tedy, že platí pro $N - 1 \geq 1$. Pokud $\lambda_N = 1$, pak $\lambda_1 = \dots = \lambda_{N-1} = 0$ a tvrzení je opět triviální. Předpokládejme tedy dále, že $\lambda_N < 1$. S využitím konvexity K a indukčního předpokladu pak máme

$$\sum_{i=1}^N \lambda_i x_i = (1 - \lambda_N) \sum_{i=1}^{N-1} \frac{\lambda_i}{1 - \lambda_N} x_i + \lambda_N x_N \in K,$$

protože $\sum_{i=1}^{N-1} \frac{\lambda_i}{1 - \lambda_N} = 1$. Platí tedy $M \subset K$ a z libovolnosti K pak plyne $M \subset \text{conv}(X)$. $\square$

Věta 1.4 (Carathéodory). Bud' $X \subset \mathbb{R}^n$. Pro každé $x \in \text{conv}(X)$ existují $x_i \in X$ a $\lambda_i \in [0, 1]$, $1 \leq i \leq n + 1$, takové, že $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1$ a $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i = x$.

Důkaz. Podle Tvzení 1.3 lze psát $x = \sum_{i=1}^N \mu_i y_i$ pro nějaké $N \in \mathbb{N}$, $y_1, \dots, y_N \in X$ a $\mu_1, \dots, \mu_N > 0$ splňující $\sum_{i=1}^N \mu_i = 1$. Mezi všemi takovými zápisy vyberme nějaký s nejmenším možným N . Pokud je $N \leq n + 1$, je důkaz hotov. Předpokládejme tedy, že $N > n + 1$. Pak má soustava $n + 1$ lineárních rovnic

$$\sum_{i=1}^N \kappa_i = 0, \quad \sum_{i=1}^N \kappa_i y_i = 0$$

alespoň jedno netriviální řešení $(\kappa_1, \dots, \kappa_N) \in \mathbb{R}^N$. Díky první rovnici navíc pro nějaké i platí $\kappa_i > 0$. Bud' $m \in \{1, \dots, N\}$ takový index, že $\frac{\mu_m}{\kappa_m} > 0$ je minimální. Potom je ale

$$x = \sum_{i=1}^N \left(\mu_i - \frac{\mu_m}{\kappa_m} \kappa_i \right) y_i$$

konvexní kombinací s méně než N kladnými koeficienty, což je ve sporu s volbou N . $\square$

1.2 KONVEXNÍ TĚLESA

Definice 1.5. Neprázdnou kompaktní konvexní množinu $K \subset \mathbb{R}^n$ nazýváme *konvexním tělesem*. Množinu všech konvexních těles značíme $\mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$.

Připomeňme, že podmnožina $\mathbb{R}^n$ je kompaktní právě tehdy, když je uzavřená a omezená. Někdy se za konvexní těleso považuje i prázdná množina. Uveďme základní příklady konvexních těles:

- (a) *bod* $\{x\}$ pro každé $x \in \mathbb{R}^n$;
- (b) *segment (interval)* $[x, y] := \{\lambda x + (1 - \lambda)y \mid \lambda \in [0, 1]\}$ mezi body $x, y \in \mathbb{R}^n$;
- (c) *jednotková Eukleidovská koule* $B^n := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}$ (ukážte!);
- (d) *standardní $(n - 1)$ -simplex* $\Delta^{n-1} := \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_i x_i = 1, x_i \geq 0\}$.

Je snadné nahlédnout, že simplex Δ^{n-1} je konvexní. Protože pro každé $(x_1, \dots, x_n) \in \Delta^{n-1}$ platí $x_i \in [0, 1]$, $1 \leq i \leq n$, je také omezený. Konečně, uzavřenost plyne z toho, že Δ^{n-1} je průnikem uzavřených poloprostorů $\{x_i \geq 0\}$ a (uzavřené) afinní nadroviny $\{\sum_i x_i = 1\}$.

Mnoho dalších příkladů konvexních těles lze zkonstruovat pomocí následujícího jednoduchého, ale důležitého důsledku Carathéodoryho věty.

Důsledek 1.6. *Konvexní obal kompaktní množiny $X \subset \mathbb{R}^n$ je kompaktní. Pokud je tedy navíc X neprázdná, pak platí $\text{conv}(X) \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$.*

Důkaz. Podle Věty 1.4 můžeme psát

$$\text{conv}(X) = \Phi(\Delta^n \times X^{n+1}),$$

kde $\Phi : \mathbb{R}^{n+1} \times (\mathbb{R}^n)^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ je zobrazení definované předpisem

$$\Phi : ((\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}), x_1, \dots, x_{n+1}) \mapsto \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i.$$

Protože Φ je zřejmě spojitý a množina $\Delta^n \times X^{n+1}$ kompaktní, je kompaktní i její obraz $\text{conv}(X)$. $\square$

Definice 1.7. Konvexní obal konečně mnoha bodů nazýváme *polytopem*. Polytop, který je konvexním obalem afinně nezávislých bodů nazýváme *simplexem*.

Připomeňme, že $x_1, \dots, x_k \in \mathbb{R}^n$ jsou afinně nezávislé právě tehdy, když má soustava lineárních rovnic $\sum_{i=1}^k \lambda_i x_i = 0$, $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 0$ pouze triviální řešení. Všimněme si, že standardní $(n - 1)$ -simplex Δ^{n-1} je konvexním obalem kanonické báze $\mathbb{R}^n$. Polytopy tvoří důležitou třídu konvexních těles. Blíže se jimi budeme zabývat v kapitole 1.5. Budeme značit

$$\text{conv}(x_1, \dots, x_m) := \text{conv}(\{x_1, \dots, x_m\}).$$

Definice 1.8. *Dimenzi konvexního tělesa $K \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ definujeme jako dimenzi jeho afinního obalu $\text{aff}(K)$, tedy nejmenšího afinního podprostoru $\mathbb{R}^n$ obsahujícího K , a značíme $\dim(K)$.*

Zřejmě platí $\dim(\{x\}) = 0$, $\dim([x, y]) = 1$ pro $x \neq y$, $\dim(B^n) = n$ a $\dim(\Delta^{n-1}) = n - 1$. Obecně, pokud jsou $x_1, \dots, x_k \in \mathbb{R}^n$ afinně nezávislé, pak simplex $\text{conv}(x_1, \dots, x_k)$ má dimenzi $k - 1$.

Na závěr této kapitoly si zavedeme dvě elementární operace na množině konvexních těles.

Definice 1.9. Minkowského součtem konvexních těles $K, L \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ nazýváme množinu

$$K + L := \{x + y \mid x \in K, y \in L\}.$$

Podobně pro $K \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ a $\lambda \in \mathbb{R}$ definujeme

$$\lambda K := \{\lambda x \mid x \in K\}.$$

Tvrzení 1.10. Pro $K, L \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ a $\lambda \in \mathbb{R}$ platí $K + \lambda L \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$.

Důkaz. Kompaktnost plyne podobně jako v důkazu Důsledku 1.6: $K + L$ je obrazem kompaktní množiny $K \times L \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ při spojitém zobrazení $(x, y) \mapsto x + y$. Pro důkaz konvexity si vezměme $x_1 + \lambda y_1, x_2 + \lambda y_2 \in K + \lambda L$ a $\mu \in [0, 1]$. Z konvexity těles K a L plyne

$$\mu(x_1 + \lambda y_1) + (1 - \mu)(x_2 + \lambda y_2) = [\mu x_1 + (1 - \mu)x_2] + \lambda[\mu y_1 + (1 - \mu)y_2] \in K + \lambda L. \quad \square$$

Příklad 1.11.

- (a) Pokud je $L = \{y\}$ jednobodová množina, pak $K + y := K + \{y\}$ je posunutím tělesa K o vektor y . Speciálně platí $K + 0 = K$.
- (b) $-K := (-1)K$ je reflexí (převrácením) tělesa K podle počátku.
- (c) Pro $x, y \in \mathbb{R}^n$ je $[0, x] + [0, y]$ rovnoběžník s vrcholy $0, x, y, x + y$.
- (d) Pro $\varepsilon > 0$ je $\varepsilon B^n = \{x \mid \|x\| \leq \varepsilon\}$ Eukleidovská koule o poloměru ε .
- (e) $K + \varepsilon B^n = \{z \in \mathbb{R}^n \mid \exists x \in K, \|x - z\| \leq \varepsilon\}$ je (uzavřené) ε -okolí tělesa $K \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$.

Pro vizualizaci Minkowského součtu je výhodné si udědomit, že

$$K + L = \bigcup_{y \in L} (K + y).$$

Minkowského součet je zřejmě asociativní i komutativní. Distributivita vzhledem k násobení skalárem však obecně platí pouze pro $\lambda \geq 0$. Množina $\mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ vybavená operacemi z Definice 1.9 tak *není* vektorovým prostorem.

1.3 HAUSDORFFOVA METRIKA

Definice 1.12. Hausdorffova vzdálenost konvexních těles $K, L \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ je definována jako

$$d_H(K, L) = \inf\{\varepsilon > 0 \mid K \subset L + \varepsilon B^n, L \subset K + \varepsilon B^n\}.$$

Věta 1.13. $(\mathcal{K}(\mathbb{R}^n), d_H)$ je úplný metrický prostor.

Důkaz. To, že je d_H metrika, bylo dokázáno v KT. Dokážeme tedy úplnost. Buď (K_k) libovolná Cauchyovská posloupnost v $\mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$. Ukážeme, že množina

$$K := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \forall \varepsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists k \geq N, \exists x_k \in K_k : \|x - x_k\| < \varepsilon\}$$

všech hromadných bodů všech posloupností (x_k) splňujících $x_k \in K_k$ je limitou posloupnosti (K_k) v $\mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$.

Ukážeme, že K je konvexní. Zvolme $x, y \in K, \varepsilon > 0$ a $N \in \mathbb{N}$. Z Cauchyovskosti (K_k) plyne existence $N_0 \in \mathbb{N}$ takového, že $d_H(K_i, K_j) \leq \frac{\varepsilon}{2}$ pro $i, j \geq N_0$. Z definice K dále existují $k \geq \max\{N, N_0\}$ a $x_k \in K_k$ splňující $\|x - x_k\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ a podobně $l \geq \max\{N, N_0\}$ a $y_l \in K_l$ splňující $\|y - y_l\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Protože $d_H(K_k, K_l) \leq \frac{\varepsilon}{2}$, existuje také $z_k \in K_k$ splňující $\|z_k - y_l\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. S využitím trojúhelníkové nerovnosti pak pro každé $\lambda \in [0, 1]$ dostáváme

$$\|\lambda x + (1 - \lambda)y - (\lambda x_k + (1 - \lambda)z_k)\| \leq \lambda \|x - x_k\| + (1 - \lambda)(\|y - y_l\| + \|y_l - z_k\|) < \varepsilon.$$

Protože K_k je konvexní, máme $\lambda x_k + (1 - \lambda)z_k \in K_k$. Pro libovolné ε a N jsme tedy našli $k \geq N$ a bod $\lambda x_k + (1 - \lambda)z_k \in K_k$, jehož vzdálenost od $\lambda x + (1 - \lambda)y$ je menší než ε . Z definice K tedy platí $\lambda x + (1 - \lambda)y \in K$.

Protože je (K_k) Cauchyovská, existuje $N \in \mathbb{N}$ takové, že $d(K_i, K_j) < 1$ pro $i, j \geq N$. Speciálně tedy $K_j \subset K_i + B^n$. Z definice K dále platí, že $K \subset K_{j_0} + B^n$ pro nějaké $j_0 \geq N$. Dohromady je tedy $K \subset K_{j_0} + 2B^n$ omezená.

Dále dokážeme, že $\mathbb{R}^n \setminus K$ je otevřená množina. Buď $x \notin K$. Pak existují $\varepsilon > 0$ a $N \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna $k \geq N$ a $x_k \in K_k$ je $\|x - x_k\| \geq \varepsilon$. Tvrdíme, že $B(x, \frac{\varepsilon}{2}) := \{y \in \mathbb{R}^n \mid \|x - y\| < \frac{\varepsilon}{2}\} \subset \mathbb{R}^n \setminus K$.

Skutečně, pokud by nějaké $y \in B(x, \frac{\epsilon}{2})$ zároveň splňovalo $y \in K$, pak by existovala $l \geq N$ a $y_l \in K_l$ splňující $\|y - y_l\| < \frac{\epsilon}{2}$, a dohromady bychom dostali

$$\epsilon < \|x - y_l\| \leq \|x - y\| + \|y - y_l\| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,$$

což je spor. $\mathbb{R}^n \setminus K$ je tedy otevřená a K uzavřená.

Zbývá dokázat $d_H(K_i, K) \rightarrow 0$ pro $i \rightarrow \infty$. Zvolme libovolné $\epsilon > 0$. Podobně jako výše existuje $N \in \mathbb{N}$ takové, že $d(K_i, K_j) < \frac{\epsilon}{2}$ pro všechna $i, j \geq N$. Speciálně tedy $K_j \subset K_i + \frac{\epsilon}{2}B^n$. Z definice K dále platí, že $K \subset K_{j_0} + \frac{\epsilon}{2}B^n$ pro nějaké $j_0 \geq N$. Dohromady je tedy $K \subset K_i + \epsilon B^n$ pro každé $i \geq N$. Tvrdíme, že pro dostatečně velká i platí také $K_i \subset K + \epsilon B^n$. Pokud by tomu tak nebylo, mohli bychom zkonstruovat posloupnost bodů $x_{i_k} \in K_{i_k}$, $i_k \rightarrow \infty$, tak, že $x_{i_k} \notin K + \epsilon B^n$. Z důkazu omezenosti K výše plyne, že tato posloupnost je omezená, a má proto hromadný bod, který podle definice K leží v K . Z konstrukce posloupnosti však tento hromadný bod leží určitě mimo $K + \frac{\epsilon}{2}B^n$, což je spor. Dohromady tedy máme $d_H(K_i, K) < \epsilon$ pro všechna dostatečně velká i a důkaz je dokončen. $\square$

Věta 1.14 (Blaschkeho věta o výběru). *Každá omezená posloupnost konvexních těles má konvergentní podposloupnost.*

Důkaz. Bud' $(K_k) \subset \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ taková posloupnost a předpokládejme, že $K_k \subset K_0$ pro nějaké $K_0 \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ a každé $k \in \mathbb{N}$. Protože je K_0 kompaktní, můžeme ji pokrýt konečným počtem koulí o poloměru $\frac{1}{2}$. Z posloupnosti (K_k) můžeme vybrat podposloupnost (K_k^1) takovou, že pro každou pokrývající kouli B platí buď $B \cap K_k^1 \neq \emptyset$ pro každé k , nebo $B \cap K_k^1 = \emptyset$ pro každé k . Všimněme si, že pak pro všechna k, l platí $K_k^1 \subset K_l^1 + B^n$ a $K_l^1 \subset K_k^1 + B^n$, dohromady tedy $d_H(K_k^1, K_l^1) \leq 1$. V další kroku pokryjeme K_0 koulemi o poloměru $\frac{1}{4}$ a z (K_k^1) analogicky vybereme posloupnost (K_k^2) splňující $d_H(K_k^2, K_l^2) \leq \frac{1}{2}$. Obecně v m -tém kroku pokrytím koulemi o poloměru $\frac{1}{2^m}$ takto dostaneme posloupnost $(K_k^m)_k$ s vlastností $d_H(K_k^m, K_l^m) \leq 2^{1-m}$. Nyní uvažujme diagonální vybranou posloupnost (K_k^k) a ukážeme, že je Cauchyovská. Pro libovolné $\epsilon > 0$ vezměme $N \in \mathbb{N}$ splňující $2^{1-N} < \epsilon$. Protože pro všechna $i, j \geq N$ jsou K_i^i, K_j^j speciálně také členy posloupnosti $(K_k^N)_k$, opravdu platí $d_H(K_i^i, K_j^j) \leq 2^{1-N} < \epsilon$. Podle Věty 1.13 má tedy posloupnost (K_k^k) , která je vybraná z posloupnosti (K_k) , limitu v $\mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$. $\square$

1.4 OPĚRNÁ FUNKCE

Definice 1.15. *Opěrnou funkci $h_K : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ konvexního tělesa $K \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ definujeme jako*

$$h_K(x) := \sup_{y \in K} \langle x, y \rangle, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Z kompaktnosti K je toto supremum ve skutečnosti maximem. Snadno se ukáže, že opěrná funkce má následující vlastnosti (viz. také KT):

- (a) $K \subset L \implies h_K \leq h_L$;
- (b) $h_{K+\lambda L} = h_K + \lambda h_L$ pro $\lambda \geq 0$;
- (c) *pozitivně homogenní*: $h_K(tx) = th_K(x)$ pro $t \geq 0$ a $x \in \mathbb{R}^n$;
- (d) *subaditivní*: $h_K(x+y) \leq h_K(x) + h_K(y)$ pro $x, y \in \mathbb{R}^n$.

Pozitivně homogenní subaditivní funkce $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ se nazývá *sublineární*. Sublineární funkce jsou zřejmě *konvexní*, tedy splňují

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y), \quad x, y \in \mathbb{R}^n, t \in [0, 1].$$

Lemma 1.16. *Každá konvexní funkce $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá.*

Důkaz. KT. $\square$

Opěrné funkce jsou tedy spojitě. Ne každá spojitá funkce je opěrnou funkcí, přesněji ne každá konvexní funkce je opěrnou funkcí. Nicméně platí

Věta 1.17. *Pro každou sublineární funkci $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ existuje právě jedno konvexní těleso $K \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ takové, že $h_K = h$.*

Důkaz. Opět bylo dokázáno v KT. Připomeňme pouze, že $K = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, y \rangle \leq h(x), x \in \mathbb{R}^n\}$. $\square$

Důsledek 1.18. *Bud' te $K, L, M \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$.*

(a) $h_K = h_L$ nastává právě tehdy, pokud $K = L$.

(b) Pokud $K + M = L + M$, pak platí $K = L$.

Důkaz. (a) plyne ihned z Věty 1.17. Pokud $K + M = L + M$, pak $h_K + h_M = h_L + h_M$ neboli $h_K = h_L$, a (b) tak plyne z (a). $\square$

Každá afinní nadrovina v $\mathbb{R}^n$ je tvaru $H_{u,\alpha} := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, u \rangle = \alpha\}$ pro nějaké $u \in \mathbb{R}^n$ a $\alpha \in \mathbb{R}$ a ohraničuje dva (uzavřené) poloprostory $H_{u,\alpha}^+ := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, u \rangle \geq \alpha\}$ a $H_{u,\alpha}^- := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, u \rangle \leq \alpha\}$.

Definice 1.19. Bud' te $K \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ a $x \in \partial K$. Afinní nadrovina $H_{u,\alpha} \subset \mathbb{R}^n$ se nazývá *opěrnou nadrovinou* ke K v bodě x , pokud $x \in H_{u,\alpha}$ a zároveň platí buď $K \subset H_{u,\alpha}^+$, nebo $K \subset H_{u,\alpha}^-$.

Lemma 1.20. *Bud' $K \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$. V každém bodě $x \in \partial K$ existuje (alespoň jedna) opěrná nadrovina ke K .*

Důkaz. KT. $\square$

Poznamenejme na závěr, že díky pozitivní homogenitě můžeme na opěrnou funkci nahlížet jako na funkci na jednotkové sféře $S^{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\} = \partial B^n$. Opěrná funkce má pak následující jednoduchý geometrický význam: Pro $u \in S^{n-1}$ je zřejmě $H_{u,h_K(u)}$ opěrnou nadrovinou ke K . Pokud je $0 \in K$, pak je tedy $h_K(u)$ rovno vzdálenosti počátku od opěrné nadroviny ke K s vnějším normálovým vektorem u . Toto platí i pro tělesa s $0 \notin K$, přijmeme-li konvenci, že tato vzdálenost je záporná, pokud 0 a K leží na opačných stranách nadroviny.

1.5 POLYTOPY

Připomeňme z Definice 1.7, že *polytopem* nazýváme konvexní těleso, které je konvexním obalem konečně mnoha bodů v $\mathbb{R}^n$. Množinu všech polytopů v $\mathbb{R}^n$ budeme značit $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$.

Důležitost polytopů tkví v tom, že umožňují, jak uvidíme, převést řadu konvexně-geometrických problémů na problémy diskrétního charakteru, lineární algebraické problémy či kombinatorické úlohy. Hlavním důvodem, proč je toto možné, je, že polytopů je v následujícím smyslu „dostatečně mnoho“:

Tvrzení 1.21. *Pro každé $K \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ a každé $\epsilon > 0$ existuje $P \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ splňující $d_H(K, P) < \epsilon$.*

Ríkáme, že množina $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ je hustá vzhledem k Hausdorffově topologii.

Důkaz. Pokryjme K systémem otevřených koulí $B(x, \frac{\epsilon}{2})$, $x \in K$. Protože je $K \subset \mathbb{R}^n$ kompaktní, existuje konečné podpokrytí $B(x_1, \frac{\epsilon}{2}), \dots, B(x_m, \frac{\epsilon}{2})$. Položme $P := \text{conv}(x_1, \dots, x_m)$. Pak zřejmě platí $K \subset P + \frac{\epsilon}{2}B^n$. Protože zároveň platí $P \subset K$, dostáváme tak $d_H(K, P) \leq \frac{\epsilon}{2}$. $\square$

Lemma 1.22. *Bud' te $\phi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ lineární zobrazení a $P = \text{conv}(x_1, \dots, x_N) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^m)$ polytop. Pak je*

$$\Phi(P) = \text{conv}(\Phi(x_1), \dots, \Phi(x_N)) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$$

také polytop.

Důkaz. Jednoduché využití linearity. $\square$

Důsledek 1.23. *Pro $P, Q \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ platí*

(a) $P \times Q \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$;

(b) $P + Q \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$.

Důkaz. Přepokládejme, že $P = \text{conv}(x_1, \dots, x_M)$ a $Q = \text{conv}(y_1, \dots, y_N)$. Dokážeme nejdříve (a). Přesněji, dokážeme, že $P \times Q$ je rovno

$$R := \text{conv}(\{(x_i, y_j) \mid 1 \leq i \leq M, 1 \leq j \leq N\}).$$

Pro $(x, y) \in P \times Q$ existují $\lambda_1, \dots, \lambda_M, \mu_1, \dots, \mu_N \geq 0$ takové, že $\sum_i \lambda_i = \sum_j \mu_j = 1$. Protože

$$(x, y) = (x, 0) + (0, y) = \sum_i \lambda_i (x_i, 0) + \sum_j \mu_j (0, y_j) = \sum_{i,j} \lambda_i \mu_j ((x_i, 0) + (0, y_j)) = \sum_{i,j} \lambda_i \mu_j (x_i, y_j)$$

a protože $\lambda_i \mu_j \geq 0$ a $\sum_{i,j} \lambda_i \mu_j = 1$, máme $P \times Q \subset R$. Naopak pro $\sum_{i,j} \sigma_{ij}(x_i, y_j) \in R$, kde $\sigma_{ij} \geq 0$ a $\sum_{i,j} \sigma_{ij} = 1$, položíme $\lambda_i := \sum_j \sigma_{ij}$ a $\mu_j := \sum_i \sigma_{ij}$. Pak platí $\lambda_i, \mu_j \geq 0$ a $\sum_i \lambda_i = \sum_j \mu_j = 1$. Proto

$$\sum_{i,j} \sigma_{ij}(x_i, y_j) = \sum_{i,j} \sigma_{ij}((x_i, 0) + (0, y_j)) = \sum_i \lambda_i(x_i, 0) + \sum_j \mu_j(0, y_j) = \left(\sum_i \lambda_i x_i, \sum_j \mu_j y_j \right) \in P \times Q,$$

a tedy také $R \subset P \times Q$.

(b) pak ihned plyne z (a) s využitím Lemmatu 1.22 pro $\Phi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n : (x, y) \mapsto x + y$. $\square$

Definice 1.24. Bud' $P \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ polytop a $H \subset \mathbb{R}^n$ libovolná opěrná nadrovina k P . Pak množinu $P \cap H$ nazveme *stěnou* P . 0-dimenzionální stěny P se nazývají *vrcholy*.

Za stěnu polytopu obvykle považujeme i polytop samotný, případně prázdnou množinu.

Lemma 1.25. Bud' $P \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ polytop a $V \subset P$ množina jeho vrcholů. Pak platí

(a) $P = \text{conv}(V)$.

(b) Pokud je H opěrná nadrovina k P , pak $P \cap H = \text{conv}(V \cap H)$. Speciálně, každá stěna P je sama polytopem.

Důkaz. KT. $\square$

Definice 1.26. *Triangularizací* polytopu $P \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ nazýváme rozklad $P = \bigcup_{i=1}^m \Delta_i$, kde $\Delta_i \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ jsou simplexy dimenze $\dim P$ takové, že pro každé $i \neq j$ je $\Delta_i \cap \Delta_j$ buď prázdná množina, nebo simplex dimenze menší než $\dim P$.

Věta 1.27. Pro každý polytop existuje jeho triangularizace.

Náznak důkazu. Bud' $P = \text{conv}\{x_1, \dots, x_N\} \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat $\dim P = n$. Jinak bychom postupovali stejně, pouze bychom uvažovali $P \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^{\dim P})$, kde nějakou volbou souřadnic ztotožníme $\text{aff}(P) = \mathbb{R}^{\dim P}$.

Ukážeme nejprve, že pro vhodnou volbu parametrů $t_i \in \mathbb{R}$ má polytop

$$Q := \text{conv}((x_1, t_1), \dots, (x_N, t_N)) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$$

následující vlastnost: Každá n -dimenzionální stěna F , jejíž projekce na $\mathbb{R}^n$ má rovněž dimenzi n , je simplex. Bud' tedy $F \subset P$ taková stěna. Zřejmě můžeme předpokládat, že F má vrcholy $(x_1, t_1), \dots, (x_M, t_M)$ a že body $x_1, \dots, x_{n+1} \in \mathbb{R}^n$ jsou afinně nezávislé. Protože $\dim F = n$, platí $M \geq n + 1$. Stačí ukázat, že $M = n + 1$. Předpokládejme tedy, že $M \geq n + 2$ a uvažujme následující soustavu lineárních rovnic pro $(\lambda_1, \dots, \lambda_{n+2}) \in \mathbb{R}^{n+2}$:

$$\sum_{i=1}^{n+2} \lambda_i x_i = 0, \quad \sum_{i=1}^{n+2} \lambda_i t_i = 0, \quad \sum_{i=1}^{n+2} \lambda_i = 0. \quad (1)$$

Pro matici této soustavy $A \in \mathbb{R}^{(n+2) \times (n+2)}$ pak $\det A = \sum_i c_i t_i$, kde $c_i \in \mathbb{R}$ závisí pouze na $x_1, \dots, x_{n+2}$. Pro $t_1 = \dots = t_{n+1} = 0$ a $t_{n+2} = 1$ je nutně $\lambda_{n+2} = 0$, a tudíž (1) nemá žádné netriviální řešení, protože podle předpokladu jsou body $x_1, \dots, x_{n+1} \in \mathbb{R}^n$ afinně nezávislé. Platí tedy $\det A \neq 0$. Jinými slovy, lineární funkcionál $(t_1, \dots, t_N) \mapsto \sum_{i=1}^{n+2} c_i t_i$ je netriviální, a jeho jádrem je tedy nějaká nadrovina $H_F \subset \mathbb{R}^N$. Pro každé $t \in \mathbb{R}^N \setminus H_F$ je tedy stále $\det A \neq 0$, což znamená, že (1) nemá netriviální řešení, a vrcholy $(x_1, t_1), \dots, (x_{n+2}, t_{n+2}) \in F$ jsou tak afinně nezávislé, což je spor s $\dim F = n$. Takto postupujeme pro každou takovou stěnu $F \subset Q$ a protože je stěn konečný počet, dostaneme neprázdnou množinu vhodných parametrů $\bigcap_F (\mathbb{R}^N \setminus H_F) = \mathbb{R}^N \setminus \bigcup_F H_F$.

Pro každý bod $x \in \text{int}(P)$ protíná afinní přímka $\{(x, t) \mid t \in \mathbb{R}\}$ hranici ∂Q ve dvou bodech. Takto rozdělíme ∂Q na „spodní“ a „horní“ polovinu. Hledanou triangularizaci pak dostaneme jako projekci n -dimenzionálních stěn Q v libovolné polovině ∂Q na $\mathbb{R}^n$. $\square$

2 VALUACE NA KONVEXNÍCH TĚLESECH

2.1 DEFINICE A ZÁKLADNÍ PŘÍKLADY

Definice 2.1. Zobrazení $\phi : \mathcal{K}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ se nazývá *valuace*, pokud pro všechna $K, L \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ taková, že $K \cup L \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$, platí

$$\phi(K \cup L) + \phi(K \cap L) = \phi(K) + \phi(L). \quad (2)$$

Někdy se místo všech konvexních těles uvažují valuace na polytopech, na polytopech s vrcholy na mřížce $\mathbb{Z}^n \subset \mathbb{R}^n$ či na konvexních tělesech (polytopech) obsahujících počátek. Naopak, jak uvidíme v následující kapitole, lze některé valuace rozšířit na speciální nekonvexní množiny.

Velmi často se také uvažují valuace (ať už na jakékoliv třídě množin) mající hodnoty v jiném prostoru než $\mathbb{R}$, například v $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^{n \times n}$ nebo $\mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ (v posledním případě mluvíme o tzv. *Minkowského valuacích*). Obecně má definice (2) smysl pro ϕ zobrazující do libovolné množiny vybavené nějakou komutativní a asociativní bilineární operací $+$ (tedy tzv. *Abelovské pologrupy*).

My se však v tomto kurzu budeme zabývat pouze valuacemi ve smyslu Definice 2.1, tedy reálnými valuacemi na $\mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$. I takových valuací je (v určitém smyslu) „příliš mnoho“, a tedy, pokud chceme vyslovit něco smysluplného o prostoru „všech“ valuací, musíme se omezit jen na speciální (ale, jak uvidíme, pořád velmi bohatou) třídu valuací splňujících následující dvě přirozené vlastnosti.

Definice 2.2. Valuace $\phi : \mathcal{K}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ se nazývá

(a) *translačně invariantní*, pokud pro každé $K \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ a $x \in \mathbb{R}^n$ platí

$$\phi(K + x) = \phi(K);$$

(b) *spojitá*, pokud pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ splňující

$$d_H(K, L) < \delta \implies |\phi(K) - \phi(L)| < \varepsilon.$$

Množinu všech translačně invariantních spojitých valuací na $\mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ značíme $\text{Val}(\mathbb{R}^n)$.

Množina $\text{Val}(\mathbb{R}^n)$ je zřejmě vektorovým prostorem se sčítáním a násobením skalárem definovaným bodově, tedy pro každé $\phi, \psi \in \text{Val}(\mathbb{R}^n)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ a $K \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ máme

$$\begin{aligned} (\phi + \psi)(K) &:= \phi(K) + \psi(K), \\ (\lambda\phi)(K) &:= \lambda\phi(K). \end{aligned}$$

Příklad 2.3.

- (a) *Eulerova charakteristika* χ , definovaná jako $\chi(K) = 1$, $K \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ je prvkem $\text{Val}(\mathbb{R}^n)$. Obecně každá konstantní valuace je zřejmě spojitá a translačně invariantní.
- (b) Každá Borelovská míra na $\mathbb{R}^n$ zúžená na $\mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ je zřejmě valuace.
- (c) *Lebesguova míra* $\lambda^n = \text{vol}_n$ je prvkem $\text{Val}(\mathbb{R}^n)$, viz TMI a KT.
- (d) *Povrch* $S(K)$ konvexního tělesa $K \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ je prvkem $\text{Val}(\mathbb{R}^n)$, viz KT a §?? níže.
- (e) Buď $\pi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ ortogonální projekce. Pak zobrazení $K \mapsto \text{vol}_k(\pi K)$ je prvkem $\text{Val}(\mathbb{R}^n)$.
- (f) Funkce $\mathcal{L}(K) = |K \cap \mathbb{Z}^n|$ počítající počet bodů mřížky $\mathbb{Z}^n$ obsažených v $K \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ je valuace, která není ani spojitá, ani translačně invariantní.

Konvexní tělesa na přímce jsou zřejmě právě uzavřené intervaly (eventuelně zdegenerované do bodu), tedy $\mathcal{K}(\mathbb{R}) = \{[a, b] \mid a, b \in \mathbb{R}, a \leq b\}$, kde $[a, a] = \{a\}$. Je snadné popsat všechny spojitě translačně invariantní valuace na této množině.

Věta 2.4. $\text{Val}(\mathbb{R}) = \text{LO}\{\chi, \text{vol}_1\}$.

Důkaz. Už víme, že $\chi, \text{vol}_1 \in \text{Val}(\mathbb{R})$, stačí tedy ukázat $\text{Val}(\mathbb{R}) \subset \text{LO}\{\chi, \text{vol}_1\}$. Vezměme si proto libovolnou valuaci $\phi \in \text{Val}(\mathbb{R})$ a položíme

$$\begin{aligned} c &:= \phi(\{0\}) \in \mathbb{R}, \\ d &:= \phi([0, 1]) - c \in \mathbb{R}, \\ \psi &:= \phi - c \cdot \chi - d \cdot \text{vol}_1 \in \text{Val}(\mathbb{R}). \end{aligned}$$

Ukážeme v několika krocích, že ψ je nulová valuace. Tím bude dokázáno, že ϕ lze psát jako lineární kombinaci χ a vol_1 . Zprv, pro každé $x \in \mathbb{R}$ máme

$$\psi(\{x\}) = \psi(\{0\}) = \phi(\{0\}) - c\chi(\{0\}) - d\text{vol}_1(\{0\}) = c - c - 0 = 0,$$

kde jsme v prvním kroku využili translační invariance ψ . Zadruhé,

$$\psi([0, 1]) = \phi([0, 1]) - c\chi([0, 1]) - d\text{vol}_1([0, 1]) = d + c - c - d = 0.$$

Zatřetí, protože je ψ valuace, pro každé $N \in \mathbb{N}$ máme

$$\begin{aligned}\psi([0, N]) &= \psi([0, N-1] \cup [N-1, N]) \\ &= \psi([0, N-1]) + \psi([N-1, N]) - \psi(\{N-1\}) \\ &= \psi([0, N-1]) + \psi([0, 1]) \\ &= \psi([0, N-1]),\end{aligned}$$

kde jsme opět využili translační invariance. Indukcí pak snadno dostaneme

$$\psi([0, N]) = \psi([0, 1]) = 0.$$

Podobně pro každé $M, N \in \mathbb{N}$ máme

$$0 = \psi([0, N]) = \psi([0, \frac{N}{M}]) + \psi([\frac{N}{M}, \frac{2N}{M}]) + \dots + \psi([\frac{(M-1)N}{M}, N]) = M\psi([0, \frac{N}{M}]),$$

a tedy $\psi([0, q]) = 0$ pro každé $q \in \mathbb{Q}, q > 0$. Konečně, pro každé $x \in \mathbb{R}, x > 0$ existuje posloupnost pozitivních racionálních čísel $q_n \rightarrow x$. Pak zřejmě platí $d_H([0, q_n], [0, x]) \rightarrow 0$ a ze spojitosti ψ dostáváme

$$\psi([0, x]) = \lim_n \psi([0, q_n]) = \lim_n 0 = 0,$$

což spolu s translační invariancí implikuje $\psi([a, b]) = 0$ pro každá $a < b$. $\square$

2.2 PRINCIP INKLUZE A EXKLUZE

Pokud je $\phi : \mathcal{K}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ valuace a $K, L \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ konvexní tělesa taková, že $K \cup L \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$, platí

$$\phi(K \cup L) = \phi(K) + \phi(L) - \phi(K \cap L).$$

Máme-li $K_1, K_2, K_3 \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ splňující $K_1 \cup K_2, K_2 \cup K_3, K_3 \cup K_1, K_1 \cup K_2 \cup K_3 \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$, pak dostaneme

$$\begin{aligned}\phi(K_1 \cup K_2 \cup K_3) &= \phi((K_1 \cup K_2) \cup K_3) \\ &= \phi(K_1 \cup K_2) + \phi(K_3) - \phi((K_1 \cup K_2) \cap K_3) \\ &= \phi(K_1 \cup K_2) + \phi(K_3) - \phi((K_1 \cap K_3) \cup (K_2 \cap K_3)) \\ &= \phi(K_1) + \phi(K_2) + \phi(K_3) - \phi(K_1 \cap K_2) - \phi(K_1 \cap K_3) - \phi(K_2 \cap K_3) + \phi(K_1 \cap K_2 \cap K_3).\end{aligned}$$

Tyto formule se snadno zobecní indukcí pro libovolný počet konvexních těles:

Tvrzení 2.5 (Princip inkluze a exkluze). *Bud' $\phi : \mathcal{K}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ valuace a $K_1, \dots, K_l \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ konvexní tělesa, jejichž libovolné sjednocení je opět konvexním tělesem. Pak platí*

$$\phi(K_1 \cup \dots \cup K_l) = \sum_I (-1)^{|I|+1} \phi\left(\bigcap_{i \in I} K_i\right), \quad (3)$$

kde sčítáme přes všechny neprázdné podmnožiny $I \subset \{1, \dots, l\}$.

Všimněme si, že pravá strana (3) má smysl pro libovolná konvexní tělesa $K_1, \dots, K_l \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$, ať jsou jejich sjednocení konvexní nebo ne. Princip inkluze a exkluze tedy naznačuje, jakým způsobem by se valuace ϕ mohla dát rozšířit na konečná sjednocení konvexních těles. Problémem však je, že taková sjednocení můžeme zřejmě reprezentovat více způsoby. Následující věta ukazuje, že pokud je ϕ spojitá, nezávisí pravá strana (3) na této reprezentaci.

Množinu všech konečných sjednocení konvexních těles budeme značit $\mathcal{UK}(\mathbb{R}^n)$. Tato množina se někdy nazývá *konvexní okruh* (z německého pojmu „*Konvexring*“ zavedeného H. Hadwigerem).

Pro libovolnou podmnožinu $X \subset \mathbb{R}^n$ uvažujme dále její charakteristickou funkci $1_X : \mathbb{R}^n \rightarrow \{0, 1\}$ definovanou jako

$$1_X(x) = \begin{cases} 1, & x \in X, \\ 0, & x \notin X. \end{cases}$$

Všimněme si, že pro $X, Y \subset \mathbb{R}^n$ platí $1_{X \cup Y} + 1_{X \cap Y} = 1_X + 1_Y$.

Lemma 2.6. Pro každá $K_1, \dots, K_l \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ a $\alpha_1, \dots, \alpha_l \in \mathbb{R}$ splňující $\sum_{i=1}^l \alpha_i 1_{K_i} = 0$ a každou valuaci $\phi \in \text{Val}(\mathbb{R}^n)$ platí $\sum_{i=1}^l \alpha_i \phi(K_i) = 0$.

Důkaz. Budeme postupovat indukcí na n . Pro $n = 0$ je tvrzení triviální, předpokládejme tedy, že platí v dimenzi $n - 1 \geq 0$. Předpokládejme dále, že pro nějaká $K_1, \dots, K_l \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$, $\alpha_1, \dots, \alpha_l \in \mathbb{R}$ a $\phi \in \text{Val}(\mathbb{R}^n)$ platí

$$\sum_{i=1}^l \alpha_i 1_{K_i} = 0, \quad (4)$$

$$\sum_{i=1}^l \alpha_i \phi(K_i) = 1 \quad (5)$$

a že $l \in \mathbb{N}$ je nejmenší možné (speciálně tedy, že $\alpha_i \neq 0$ pro každé i). Ukážeme, že tento předpoklad vede ke sporu.

Bud' $H \subset \mathbb{R}^n$ nějaká afinní nadrovina splňující $K_1 \subset \text{int } H^+$. Protože je ϕ valuační, z (5) plyne

$$\sum_{i=1}^l \alpha_i \phi(K_i \cap H^+) + \sum_{i=1}^l \alpha_i \phi(K_i \cap H^-) - \sum_{i=1}^l \alpha_i \phi(K_i \cap H) = 1. \quad (6)$$

Vynásobíme-li (4) funkcí 1_{H^-} , dostaneme s využitím $K_1 \cap H^- = \emptyset$

$$0 = \sum_{i=1}^l \alpha_i 1_{K_i \cap H^-} = \sum_{i=2}^l \alpha_i 1_{K_i \cap H^-}.$$

Z toho plyne, že druhá suma v (6) je nulová, tedy $\sum_{i=1}^l \alpha_i \phi(K_i \cap H^-) = \sum_{i=2}^l \alpha_i \phi(K_i \cap H^-) = 0$, jinak bychom vhodným přeskálováním parametrů α_i dostali spor s minimalitou l . Vynásobením (4) funkcí 1_H dostaneme podobně $0 = \sum_{i=1}^l \alpha_i 1_{K_i \cap H}$, což dle indukčního předpokladu implikuje $\sum_{i=1}^l \alpha_i \phi(K_i \cap H) = 0$. Celkem se tedy (6) zredukuje na

$$\sum_{i=1}^l \alpha_i \phi(K_i \cap H^+) = 1.$$

Zvolme dále posloupnost afinních nadrovin $H_i \subset \mathbb{R}^n$ takových, že $K_1 \subset \text{int } H_i^+$ a $K_1 = \bigcap_i H_i^+$. Iterací argumentu z předchozího odstavce dostaneme pro každé $q \in \mathbb{N}$

$$\sum_{i=1}^l \alpha_i \phi(K_i \cap H_1^+ \cap \dots \cap H_q^+) = 1.$$

Protože je valuační ϕ spojitá, limitním přechodem $q \rightarrow \infty$ pak dostaneme

$$\sum_{i=1}^l \alpha_i \phi(K_i \cap K_1) = 1.$$

Stejný postup pak můžeme opakovat i pro ostatní tělesa $K_2, \dots, K_l$. Takto dostaneme

$$\sum_{i=1}^l \alpha_i \phi(K_1 \cap \dots \cap K_m) = 1.$$

To je však ve sporu s rovnicí $\sum_{i=1}^l \alpha_i 1_{K_1 \cap \dots \cap K_l} = 0$, kterou dostaneme vynásobením (4) funkcí $1_{K_1 \cap \dots \cap K_l}$ a která říká, že buď $\sum_i \alpha_i = 0$, nebo $K_1 \cap \dots \cap K_l = \emptyset$. $\square$

Lemma 2.7. Pro konečnou neprázdnou množinu L platí

$$\sum_{J \cup K = L} (-1)^{|J|+|K|} = (-1)^{|L|+1}, \quad (7)$$

kde sčítáme přes všechny neprázdné podmnožiny $J, K \subset L$ takové, že $J \cup K = L$.

Důkaz. Budeme předpokládat, že $L = \{1, \dots, l\}$, a dokážeme tvrzení indukcí na $l \in \mathbb{N}$. Pro $l = 1$ máme nutně $J = K = L = \{1\}$ a (7) platí. Předpokládejme tedy $l > 1$ a platnost (7) pro $l - 1$. Uvažujme

nejprve tu část sumy (7), pro kterou platí $J = \{l\}$. Potom nutně $K = \{1, \dots, l\}$ nebo $K = \{1, \dots, l-1\}$. Příslušná část sumy je tedy rovna

$$(-1)^{1+l} + (-1)^{1+l-1} = 0.$$

To samé platí pro část sumy splňující $K = \{l\}$. Po zbytek důkazu označme $J' := J \setminus \{l\}$ a podobně pro K' a L' . Podle indukčního předpokladu je část sumy odpovídající $l \notin J$ a $\{l\} \subseteq K$ rovna

$$\sum_{J \cup K' = L'} (-1)^{|J|+|K'|+1} = -(-1)^{|L'|+1} = (-1)^{l+1}$$

To samé platí pro část sumy odpovídající $l \notin K$ a $\{l\} \subseteq J$. Zbývá tedy uvažovat sumandy splňující $J, K \supsetneq \{l\}$. Ty se, opět podle indukčního předpokladu, sečtou na

$$\sum_{J' \cup K' = L'} (-1)^{|J'|+1+|K'|+1} = (-1)^{|L'|+1} = (-1)^l.$$

Sečtením všech 5 částí sumy $\sum_{J \cup K = L} (-1)^{|J|+|K|}$ dostaneme $(-1)^{l+1}$. $\square$

Věta 2.8 (Groemer). Pro každou valuaci $\phi \in \text{Val}(\mathbb{R}^n)$ existuje právě jedno zobrazení $\bar{\phi} : \mathcal{UK}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ takové, že pro každá $K_1, \dots, K_l \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ platí

$$\bar{\phi}(K_1 \cup \dots \cup K_l) = \sum_I (-1)^{|I|+1} \phi\left(\bigcap_{i \in I} K_i\right). \quad (8)$$

Speciálně tedy platí $\bar{\phi}|_{\mathcal{K}(\mathbb{R}^n)} = \phi$. Toto zobrazení je navíc valuační, tedy pro každé $X, Y \in \mathcal{UK}(\mathbb{R}^n)$ platí

$$\bar{\phi}(X \cup Y) + \bar{\phi}(X \cap Y) = \bar{\phi}(X) + \bar{\phi}(Y). \quad (9)$$

Důkaz. Pro důkaz první části stačí ukázat, že $\bar{\phi}$ je předpisem (8) dobře definované. Jednoznačnost je pak zřejmá. Uvažujme tedy $K_1, \dots, K_l, L_1, \dots, L_m$ taková, že $X := \bigcup_i K_i = \bigcup_j L_j$. Protože $X^c = \bigcap_i K_i^c$, platí

$$(1 - 1_X) = \prod_i (1 - 1_{K_i}).$$

Odtud snadno plyne

$$1_X = \sum_{I \subset \{1, \dots, l\}} (-1)^{|I|+1} \prod_{i \in I} 1_{K_i} = \sum_{I \subset \{1, \dots, l\}} (-1)^{|I|+1} 1_{\bigcap_{i \in I} K_i}$$

Stejně dostaneme

$$1_X = \sum_{J \subset \{1, \dots, m\}} (-1)^{|J|+1} 1_{\bigcap_{j \in J} L_j},$$

a dohromady tak máme

$$\sum_{I \subset \{1, \dots, l\}} (-1)^{|I|+1} 1_{\bigcap_{i \in I} K_i} - \sum_{J \subset \{1, \dots, m\}} (-1)^{|J|+1} 1_{\bigcap_{j \in J} L_j} = 0.$$

Dle Lemmatu 2.6 pak platí

$$\sum_{I \subset \{1, \dots, l\}} (-1)^{|I|+1} \phi\left(\bigcap_{i \in I} K_i\right) - \sum_{J \subset \{1, \dots, m\}} (-1)^{|J|+1} \phi\left(\bigcap_{j \in J} L_j\right) = 0.$$

Pro důkaz (9) uvažujme $X = \bigcup_{i=1}^l K_i$ a $Y = \bigcup_{j=1}^m L_j$ a pro $I \subset \{1, \dots, l\}$ a $J \subset \{1, \dots, m\}$ označme $K_I = \bigcap_{i \in I} K_i$ a $L_J = \bigcap_{j \in J} L_j$. Indukcí na $m \in \mathbb{N}$ dokážeme

$$\bar{\phi}(X \cap Y) = \sum_{I, J} (-1)^{|I|+|J|} \phi(K_I \cap L_J). \quad (10)$$

Odtud již (9) snadno plyne, protože podle definice (8) máme

$$\begin{aligned} \bar{\phi}(X \cup Y) &= \bar{\phi}(K_1 \cup \dots \cup K_l \cup L_1 \cup \dots \cup L_m) \\ &= \sum_I (-1)^{|I|+1} \phi(K_I) + \sum_J (-1)^{|J|+1} \phi(L_J) + \sum_{I, J} (-1)^{|I|+|J|+1} \phi(K_I \cap L_J) \\ &= \bar{\phi}(X) + \bar{\phi}(Y) - \sum_{I, J} (-1)^{|I|+|J|} \phi(K_I \cap L_J). \end{aligned}$$

Položme tedy $m = 1$. Potom

$$\bar{\phi}(X \cap Y) = \bar{\phi}\left(\bigcup_{i=1}^l (K_i \cap L_1)\right) = \sum_I (-1)^{|I|+1} \phi(K_I \cap L_1) = \sum_{I,J} (-1)^{|I|+|J|} \phi(K_I \cap L_J),$$

protože sumace napravo je zřejmě netriviální pouze pro $J = \{1\}$, a (10) tedy platí. Předpokládejme nyní $m > 1$ a platnost (10) pro $m - 1$. Potom s využitím

$$\begin{aligned} X \cap Y &= (K_1 \cup \dots \cup K_l) \cap (L_1 \cup \dots \cup L_m) \\ &= ((K_1 \cup \dots \cup K_l) \cap (L_1 \cup \dots \cup L_{m-1})) \cup ((K_1 \cup \dots \cup K_l) \cap L_m) \\ &= \left(\bigcup_{i=1}^l (K_i \cap L_m)\right) \cup \left(\bigcup_{i=1}^l \bigcup_{j=1}^{m-1} K_i \cap L_j\right) \end{aligned}$$

dostaneme

$$\begin{aligned} \bar{\phi}(X \cap Y) &= \sum_{I \subset \{1, \dots, l\}} (-1)^{|I|+1} \phi(K_I \cap L_m) + \sum_{K \subset \{1, \dots, l\} \times \{1, \dots, m-1\}} (-1)^{|K|+1} \phi\left(\bigcap_{(i,j) \in K} (K_i \cap L_j)\right) \\ &\quad + \sum_{I \subset \{1, \dots, l\}} (-1)^{|I|} \sum_{K \subset \{1, \dots, l\} \times \{1, \dots, m-1\}} (-1)^{|K|+1} \phi\left(K_I \cap L_m \cap \bigcap_{(i,j) \in K} (K_i \cap L_j)\right) \\ &= \sum_{I \subset \{1, \dots, l\}} (-1)^{|I|+1} \phi(K_I \cap L_m) + \bar{\phi}\left(\bigcup_{i=1}^l \bigcup_{j=1}^{m-1} (K_i \cap L_j)\right) \\ &\quad + \sum_{I \subset \{1, \dots, l\}} (-1)^{|I|} \bar{\phi}\left(\bigcup_{i=1}^l \bigcup_{j=1}^{m-1} (K_i \cap L_m \cap K_i \cap L_j)\right). \end{aligned}$$

Druhý a třetí člen můžeme nyní upravit podle indukčního předpokladu a na třetí člen dále použít Lemma 2.7, čímž dostaneme

$$\begin{aligned} \bar{\phi}(X \cap Y) &= \sum_{I \subset \{1, \dots, l\}} (-1)^{|I|+1} \phi(K_I \cap L_m) + \sum_{\substack{I \subset \{1, \dots, l\} \\ J \subset \{1, \dots, m-1\}}} (-1)^{|I|+|J|} \phi(K_I \cap L_J) \\ &\quad + \sum_{\substack{I, A \subset \{1, \dots, l\} \\ J \subset \{1, \dots, m-1\}}} (-1)^{|I|+|A|+|J|} \phi(K_I \cap L_m \cap K_A \cap L_J) \\ &= \sum_{I \subset \{1, \dots, l\}} (-1)^{|I|+1} \phi(K_I \cap L_{\{m\}}) + \sum_{\substack{I \subset \{1, \dots, l\} \\ J \subset \{1, \dots, m-1\}}} (-1)^{|I|+|J|} \phi(K_I \cap L_J) \\ &\quad + \sum_{\substack{B \subset \{1, \dots, l\} \\ J \subset \{1, \dots, m-1\}}} (-1)^{|J|} \sum_{I \cup A = B} (-1)^{|I|+|A|} \phi(K_B \cap L_{J \cup \{m\}}) \\ &= \sum_{I \subset \{1, \dots, l\}} (-1)^{|I|+1} \phi(K_I \cap L_{\{m\}}) + \sum_{\substack{I \subset \{1, \dots, l\} \\ J \subset \{1, \dots, m-1\}}} (-1)^{|I|+|J|} \phi(K_I \cap L_J) \\ &\quad + \sum_{\substack{I \subset \{1, \dots, l\} \\ J \subset \{1, \dots, m-1\}}} (-1)^{|I|+|J|+1} \phi(K_I \cap L_{J \cup \{m\}}) \\ &= \sum_{\substack{I \subset \{1, \dots, l\} \\ J \subset \{1, \dots, m\}}} (-1)^{|I|+|J|} \phi(K_I \cap L_J) \end{aligned}$$

□

Ve skutečnosti lze spojitě valuační rozšířit ještě dále, a sice na množinu

$$\mathcal{BK}(\mathbb{R}^n) := \{X \setminus Y \mid X, Y \in \mathcal{UK}(\mathbb{R}^n), Y \subset X\}.$$

Důsledek 2.9. Pro každou valuaci $\phi \in \text{Val}(\mathbb{R}^n)$ existuje právě jedno zobrazení $\hat{\phi} : \mathcal{BK}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ takové, že

pro každé $X, Y \in \mathcal{UK}(\mathbb{R}^n)$, $Y \subset X$ platí

$$\widehat{\phi}(X \setminus Y) = \overline{\phi}(X) - \overline{\phi}(Y).$$

Důkaz. Uvažujme libovolné množiny $X_i, Y_i \in \mathcal{UK}(\mathbb{R}^n)$, $i = 1, 2$, splňující $Y_i \subset X_i$ a $X_1 \setminus Y_1 = X_2 \setminus Y_2$. Opět stačí ukázat, že

$$\overline{\phi}(X_1) - \overline{\phi}(Y_1) = \overline{\phi}(X_2) - \overline{\phi}(Y_2).$$

Snadno se však ukáže, že

$$X_1 \cap Y_2 = X_2 \cap Y_1 \quad \text{a} \quad X_1 \cup Y_2 = X_2 \cup Y_1,$$

a odtud s využitím (9) ihned plyne

$$\overline{\phi}(X_1) + \overline{\phi}(Y_2) = \overline{\phi}(X_1 \cup Y_2) + \overline{\phi}(X_1 \cap Y_2) = \overline{\phi}(X_2 \cup Y_1) + \overline{\phi}(X_2 \cap Y_1) = \overline{\phi}(X_2) + \overline{\phi}(Y_1).$$

□

Pro jednoduchost budeme značit $\widehat{\phi} = \overline{\phi} = \phi$.

LITERATURA

- [1] S. Alesker, *Introduction to the Theory of Valuations*, American Mathematical Soc., 2018.
- [2] P. Gruber, *Convex and Discrete Geometry*, Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2007.
- [3] D. A. Klain and G. C. Rota, *Introduction to Geometric Probability*, Cambridge University Press, 1997.
- [4] R. Schneider, *Convex Bodies: The Brunn–Minkowski Theory*, Cambridge University Press, 2014.