

NOFY152 MATEMATICKÁ ANALÝZA II

12. CVIČENÍ, 12.5.2025

Jan Kotrbatý

Nalezněte lokální extrémy následujících funkcí:

1. $f(x, y) = x^2 + y^2,$

2. $f(x, y) = x^2 - y^2,$

3. $f(x, y) = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2,$

4. $f(x, y) = (x^2 + y^2)e^{-x^2-y^2},$

5. $f(x, y) = \left(2x^2 - xy + \frac{y^2}{3} - 5x + \frac{5y}{3} + \frac{10}{3}\right)e^{x+y},$

6. $f(x, y) = \begin{cases} xy \ln(x^2 + y^2), & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0), \end{cases}$

7. $f(x, y) = x + y + 4 \cos x \cos y,$

8. $f(x, y) = \sin x + \cos y + \cos(x - y), \quad (x, y) \in (0, \frac{\pi}{2}) \times (0, \frac{\pi}{2}),$

9. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 6z,$

10. $f(x, y, z) = (ax + by + cz)e^{-x^2-y^2-z^2}$ v závislosti na parametrech $a, b, c \in \mathbb{R}$.

11. Dokažte, že existuje okolí V bodu $(1, 1) \in \mathbb{R}^2$ takové, že množina

$$\{(x, y) \in V \mid x^3 + y^3 - 2xy = 0\}$$

je grafem nějaké funkce $y = f(x)$, která je třídy C^2 na nějakém okolí bodu $x = 1$. Spočtěte dále $f'(1)$ a $f''(1)$.

12. Spočtěte parciální derivace druhého řádu funkce $z = f(x, y)$ implicitně zadané vztahem

$$x + y + z = e^{-x-y-z}.$$

13. Nalezněte první a druhý diferenciál funkce $z = f(x, y)$ implicitně zadané vztahem

$$z = x + \arctan \frac{y}{z - x}.$$

14. Nalezněte du a dv , jsou-li funkce $u = u(x, y)$ a $v = v(x, y)$ implicitně zadány vztahy

$$u + v = x + y, \quad \frac{\sin u}{\sin v} = \frac{x}{y}.$$

15. Nalezněte lokální extrémy funkce $z = z(x, y)$ implicitně zadané vztahem

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2(x^2 + y^2 - z^2)$$

v závislosti na parametru $a \in \mathbb{R}$.