

NOFY152 MATEMATICKÁ ANALÝZA II

9. CVIČENÍ, 14.4.2025

Jan Kotrbatý

1. Rozhodněte, zda jsou následující prostory metrické:

- (a) množina všech posloupností splňující $\sum |x_n| < \infty$ s metrikou $\rho(x, y) = \sum |x_n - y_n|$,
- (b) množina všech posloupností splňující $\sum |x_n|^2 < \infty$ s metrikou $\rho(x, y) = (\sum |x_n - y_n|^2)^{\frac{1}{2}}$,
- (c) množina všech posloupností splňující $\sup |x_n| < \infty$ s metrikou $\rho(x, y) = \sum |x_n - y_n|$.

2. V Eukleidovském prostoru $\mathbb{R}^2$ najděte uzávěr grafu funkce

$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

3. Najděte vnitřek, uzávěr a hranici následujících množin:

- (a) $\mathbb{Q} \cap (0, 1) \subset \mathbb{R}$,
- (b) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1, y \geq 0\}$,
- (c) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid |z| < x^2 + y^2 \leq 1\}$,
- (d) $\mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$,
- (e) jednotkový kruh v $\mathbb{R}^2$ se středem v počátku bez úsečky $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

4. Rozhodněte, zda jsou následující množiny otevřené, resp. uzavřené:

- (a) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 > 1\}$,
- (b) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 1 < x^2 + y^2 + z^2 \leq 2\}$.

5. Pro každé $t \in \mathbb{R}$ najděte vnitřek, uzávěr a hranici množiny

$$M_t = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (|x| + |y|)e^{-|x| - |y|} \leq t\}.$$

6. Rozhodněte, zda jsou následující množiny omezené:

- (a) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2 \leq xyz < 4\}$,
- (b) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^3 + y^3 - 2xy = 0, x \geq 0, y \geq 0\}$.