Důležité substituce: převod na racionální funkce

Jsou-li P, Q polynomy $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$, pak $R := \frac{P}{Q}$ nazveme racionální funkce jedné reálné proměnné, platí $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$.

Obecněji, jsou-li P, Q polynomy dvou reálných proměnných, tj. $P, Q : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, kde $P(x, y) = \sum\limits_{0 \le i+j \le n} a_{ij} x^i y^j$ a $Q(x, y) = \sum\limits_{0 \le i+j \le m} b_{ij} x^i y^j$, pak $R := \frac{P}{Q}$ nazveme racionální funkce dvou reálných proměnných, platí $R(x, y) = \frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$.

$$\boxed{(\mathbf{I}) \qquad \int \mathbf{R}(\mathbf{e}^{\alpha \mathbf{x}}) \mathbf{dx}}$$

Substituce: $y = e^{\alpha x}, \quad x \in \mathbb{R}$

Tvar derivace: $dx = \frac{1}{\alpha y} dy$

Výsledek: $\int R(y) \frac{1}{\alpha y} dy$

$$\boxed{(\mathbf{II}) \qquad \int \frac{\mathbf{R}(\ln \mathbf{x})}{\mathbf{x}} \mathbf{dx}}$$

Substituce: $y = \ln x, \quad x > 0$

Tvar derivace: $\frac{dx}{x} = dy$

Výsledek: $\int R(y) dy$

$$\boxed{(\mathbf{III}) \qquad \int \mathbf{R}\Bigg(\mathbf{x}, \Big(\frac{\mathbf{ax}+\mathbf{b}}{\mathbf{cx}+\mathbf{d}}\Big)^{\frac{1}{s}}\Bigg) \mathbf{dx}}$$

Substituce: $t = \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{1}{s}}$

Podmínky: $ad - bc \neq 0\,;$ $\qquad s = 2k \implies \frac{ax+b}{cx+d} > 0\,, \qquad s = 2k-1 \implies x \neq -\frac{d}{c}$

Inverze: $x = \frac{-dt^s + b}{ct^s - a}$

Tvar derivace: $dx = (ad - bc)s \frac{t^{s-1}}{(ct^s - a)^2} dt$

Výsledek: $(ad - bc)s \int \frac{\hat{R}(t^s, t) t^{s-1}}{(ct^s - a)^2} dt$

$$\boxed{(\mathbf{IV}) \qquad \int \mathbf{R}\big(\mathbf{x}, \sqrt{\mathbf{ax^2} + \mathbf{bx} + \mathbf{c}}\big) \mathbf{dx}}$$

`Eulerovy substituce`

Čtyři netriviální případy (někdy i dva najednou).

(1) $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2),\ x_1 < x_2,\ x_1, x_2 \in \mathbb{R}$

Substituce: $t = \big(\frac{x - x_1}{x - x_2}\big)^{\frac{1}{2}}$ vede k **(III)**

(2) $a > 0$

Substituce: $\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{a} x + t \implies x = (t^2 - c)/(b - 2\sqrt{a} t)$

(3) $c > 0$

Substituce: $\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{c} + tx \implies x = (2\sqrt{c} t - b)/(a - t^2)$

(4) $a \le 0$ a $ax^2 + bx + c$ nemá v $\mathbb{R}$ kořen ($\implies c \le 0$): odmocnina není v $\mathbb{R}$ pro žádné x definována.

$\boxed{(\mathbf{V}) \qquad \int \mathbf{R}(\cos\mathbf{x}, \sin\mathbf{x})\mathbf{dx}}$ `Goniometrické substituce`

Substituce: $y = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ $\quad x \neq \pi + 2k\pi\,, k \in \mathbb{Z}$

Inverze: $x = 2\,\operatorname{arctg} y$ *Tvar derivace:* $dx = \frac{2}{1+y^2}dy$

$$\text{cosinus:} \qquad \cos x = \frac{\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{1 - y^2}{1 + y^2}$$

$$\text{sinus:} \qquad \sin x = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}} = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{2y}{1 + y^2}$$

Zjednodušení:

(1) $R(-\cos x, \sin x) = -R(\cos x, \sin x) \implies$ *Substituce:* $y = \sin x$

(2) $R(\cos x, -\sin x) = -R(\cos x, \sin x) \implies$ *Substituce:* $y = \cos x$

(3) $R(-\cos x, -\sin x) = R(\cos x, \sin x) \implies$ *Substituce:* $y = \operatorname{tg} x,\ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

$$\cos^2 x = \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x + \sin^2 x} = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \frac{1}{1 + y^2}$$

$$\sin^2 x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x + \sin^2 x} = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \frac{y^2}{1 + y^2}$$

$$\sin x \cos x = \frac{\operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \frac{y}{1 + y^2}$$

$\boxed{(\mathbf{VI}) \qquad \int \mathbf{x^m(a + bx^n)^p dx}\,, \qquad \mathbf{m, n, p} \in \mathbb{Q}}$ `Čebyševovy substituce`

Umíme řešit pomocí elementárních funkcí pouze v následujících třech případech:

(1) $p \in \mathbb{Z}$. Pak položme $m = m'/\ell$, $n = n'/\ell$, kde m', n' a $\ell \in \mathbb{Z}$, $\ell > 0$.

Substituce: $t = x^{\frac{1}{\ell}}$

(2) $(m+1)/n \in \mathbb{Z},\ p = k/s,\ k, s \in \mathbb{Z}$

Substituce: $t = (a + bx^n)^{\frac{1}{s}}$

Inverze: $x = \frac{(t^s - a)^{1/n}}{b^{1/n}}$ *Tvar derivace:* $dx = \frac{1}{nb^{1/n}}(t^s - a)^{\frac{1}{n}-1}st^{s-1}dt.$

$$\textit{Výsledek: } \int x^m(a + bx^n)^p dx = \int \frac{1}{b^{\frac{m}{n}}}(t^s - a)^{\frac{m}{n}} t^k \frac{1}{nb^{\frac{1}{n}}}(t^s - a)^{\frac{1}{n}-1}st^{s-1}dt$$
$$= \frac{s}{nb^{\frac{m+1}{n}}}\int t^{s+k-1}(t^s - a)^{\frac{m+1}{n}-1}dt$$

(3) $\frac{m+1}{n} + p \in \mathbb{Z},\ p = k/s,\ k, s \in \mathbb{Z}$

Substituce: $t = (ax^{-n} + b)^{\frac{1}{s}}$

Inverze: $x = \left(\frac{a}{t^s - b}\right)^{\frac{1}{n}}$ *Tvar derivace:* $dx = -\frac{a^{1/n}}{n}(t^s - b)^{-\frac{1}{n}-1}st^{s-1}dt$

$$\textit{Výsledek: } \int x^m(a + bx^n)^p dx = \int x^m x^{np}(ax^{-n} + b)^{\frac{k}{s}}dx$$
$$= \int \left(\frac{a}{t^s - b}\right)^{\frac{m}{n}} t^k \left(\frac{a}{t^s - b}\right)^p \frac{a^{\frac{1}{n}}}{-n}(t^s - b)^{-\frac{1}{n}-1}st^{s-1}dt$$
$$= -\frac{a^{\frac{m+1}{n}+p}s}{n}\int t^{k+s-1}(t^s - b)^{-(\frac{m+1}{n}+p-1)}dt$$