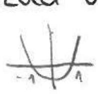
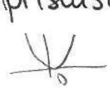
Opakování , 1/1

Opakování ze SŠ , $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$

Komplexní čísla $\mathbb{C}$ jsou rozšířením oboru reálných čísel ($x \in \mathbb{R}$ se dá zapsat $(x,0) \in \mathbb{C}$) tak, aby každá algebraická rovnice měla příslušný počet řešení dle základní věty algebr

$x^2 - 1 = 0$  $x^2 = 0$  $x^2 + 1 = 0$ 

$x = \pm 1$ dve riešenia v $\mathbb{R}$ aj v $\mathbb{C}$ | $x = 0$ dvojnásobné r. v $\mathbb{R}$ aj v $\mathbb{C}$ | nemá rieš. v $\mathbb{R}$, $x = \pm i$ 2 rieš. v $\mathbb{C}$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{\pm\sqrt{-4}}{2} = \frac{\pm\sqrt{i^2 4}}{2} = \pm i$$

Príklad: $(x+1)^2 (x-2) = 0$

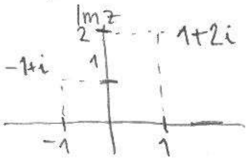
pol. 3 stupňa $\Rightarrow$ 3 riešenia v $\mathbb{R}$ (aj v $\mathbb{C}$): $-1, -1, 2$

$(x^2+1)(x-2) = 0$

pol. 3. stupňa $\Rightarrow$ 3 riešenia v $\mathbb{C}$: $i, -i, 2$

Algebraický tvar k.č. : $\underset{\text{kompl. č}}{z} = \underset{\text{Re } z}{a} + \underset{\text{imaginárna jednotka}}{i}\,\overset{\text{Im } z}{b}$, $i^2 = -1$

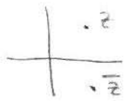
$i^1 = i$
$i^2 = -1$
$i^3 = i^2 \cdot i^1 = -i$
$i^4 = i^2 i^2 = 1$
$i^5 = i^4 \cdot i = i$
...

geometrická interpretace: 

počítání: • $z_1 \pm z_2 = (a_1 + ib_1) \pm (a_2 + ib_2) = (a_1 \pm a_2) + i(b_1 \pm b_2)$

• $z_1 \cdot z_2 = (a_1 + ib_1) \cdot (a_2 + ib_2) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + a_2 b_1)$

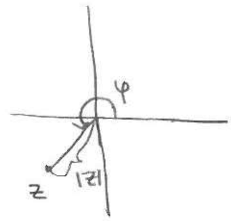
• $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{a_1 + ib_1}{a_2 + ib_2} = \dfrac{a_1 + ib_1}{a_2 + ib_2} \cdot \dfrac{a_2 - ib_2}{a_2 - ib_2} = \dfrac{(a_1 a_2 + b_1 b_2) + i(a_2 b_1 - a_1 b_2)}{a_2^2 + b_2^2}$

• $\bar{z} := a - ib$ komplexně združené k $z = a + ib$ 

~~Geometr~~

Goniometrický tvar k.č. : $z = |z|(\cos\varphi + i \sin\varphi) = |z| e^{i\varphi}$

kde • $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ modul, velikost z

• $\varphi = \arg z$ argument z , $\varphi \in \langle 0, 2\pi)$ $(\langle -\pi, \pi), \ldots)$ 

1. Nalezněte reálnou a imaginární část

a) $z = \frac{2}{1-3i} = \frac{2+6i}{1+9} = \underbrace{\frac{1}{5}}_{\text{Re}z} + \underbrace{\frac{3}{5}}_{\text{Im}z} i$

b) $z = (1+i\sqrt{3})^3 = 1 + 3i\sqrt{3} + 3(i\sqrt{3})^2 + i^3(\sqrt{3})^3$

$= 1 + i3\sqrt{3} - 9 - i3\sqrt{3} = -8 = \text{Re}z, \quad \text{Im}z = 0$

2. Nalezněte velikosti a argumenty následujících komplexních čísel

a) $z = -2-2i$

φ	$30°$ $\pi/6$	$45°$ $\pi/4$	$60°$ $\pi/3$
$\sin\varphi$	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$
$\cos\varphi$	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$

$|z| = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$\text{Re}z = |z|\cos\varphi, \quad \text{Im}z = |z|\sin\varphi$

$$\left.\begin{aligned} \cos\varphi &= \frac{\text{Re}z}{|z|} = \frac{-2}{\sqrt{8}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\varphi &= \frac{\text{Im}z}{|z|} = \frac{-2}{\sqrt{8}} = \frac{-\sqrt{2}}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \varphi = \frac{5}{4}\pi$$

$z = \sqrt{8}\, e^{i\frac{5}{4}\pi}$

b) $z = 1 + i^{123} = 1 + i^{120} \cdot i^{3} = 1 - i$

$|z| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$

$$\left.\begin{aligned} \cos\varphi &= \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\varphi &= -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \varphi = \frac{7}{4}\pi$$

$z = \sqrt{2}\, e^{i\frac{7}{4}\pi}$

3. Dokažte

a) $z + \bar{z} = a + ib + a - ib = 2a = 2\text{Re}z$

$z + \bar{z} = \text{Re}z + i\text{Im}z + \text{Re}z - i\text{Im}z = 2\text{Re}z$

b) $z - \bar{z} = \text{Re}z + i\text{Im}z - \text{Re}z + i\text{Im}z = 2i\,\text{Im}z$

c) $\overline{(\bar{z})} = \overline{(\text{Re}z - i\text{Im}z)} = \text{Re}z + i\text{Im}z = z$

d) $|\bar{z}| = \sqrt{(\text{Re}z)^2 + (-\text{Im}z)^2} = \sqrt{(\text{Re}z)^2 + (\text{Im}z)^2} = |z|$

e) $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$

$|z_1 z_2| = \sqrt{(\text{Re}z_1z_2)^2 + (\text{Im}z_1z_2)^2} = \sqrt{(\text{Re}z_1\text{Re}z_2 - \text{Im}z_1\text{Im}z_2)^2 + (\text{Re}z_1\text{Im}z_2 + \text{Re}z_2\text{Im}z_1)^2}$

$= \sqrt{\text{Re}z_1^2\text{Re}z_2^2 \cancel{- 2\text{Re}z_1\text{Re}z_2\text{Im}z_1\text{Im}z_2} + \text{Im}z_1^2\text{Im}z_2^2 + \text{Re}z_1^2\text{Im}z_2^2 \cancel{+ 2\text{Re}z_1\text{Re}z_2\text{Im}z_1\text{Im}z_2} + \text{Re}z_2^2\text{Im}z_1^2}$

$= \sqrt{\text{Re}z_1^2(\text{Re}z_2^2 + \text{Im}z_2^2) + \text{Im}z_1^2(\text{Re}z_2^2 + \text{Im}z_2^2)} = \sqrt{(\text{Re}z_1^2 + \text{Im}z_1^2)(\text{Re}z_2^2 + \text{Im}z_2^2)}$

$= |z_1||z_2|$

f) $\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2 \pmod{2\pi}$ $z_1, z_2 \neq 0$

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1|\, e^{i\varphi_1} \cdot |z_2|\, e^{i\varphi_2} = |z_1||z_2|\, e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$$, mod 2π , aby $\varphi_1+\varphi_2 \in \langle 0, 2\pi)$

nebo:

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1| (\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) |z_2| (\cos\varphi_2 + i \sin\varphi_2)$$
$$= |z_1||z_2| \left(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2 + i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \cos\varphi_1\sin\varphi_2)\right)$$
$$= |z_1 z_2| \left(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)\right)$$

g) $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg z_1 - \arg z_2 \pmod{2\pi}$ $z_1, z_2 \neq 0$

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{|\bar{z}|(\cos\varphi - i\sin\varphi)}{|z|^2} = \frac{1}{|z|}\left(\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)\right)$$

$$\Rightarrow \left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|} \quad \& \quad \arg\bar{z} = -\arg z$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{|z_2|^2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} e^{i\varphi_1} \cdot e^{-i\varphi_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}$$ mod 2π

nebo:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)$$
$$= \frac{|z_1|}{|z_2|}\left(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + \sin\varphi_1\sin\varphi_2 + i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_2\cos\varphi_1)\right)$$
$$= \frac{|z_1|}{|z_2|}\left(\cos(\varphi_1-\varphi_2) + i\sin(\varphi_1-\varphi_2)\right)$$

4. Řešte v $\mathbb{C}$:

a) $x^6 + 1 = 0$

$$z^6 = |z|^6 e^{i6\varphi} = |z|^6(\cos(6\varphi) + i\sin(6\varphi)) = -1 \quad \Rightarrow \quad |z| = 1$$
$$6\varphi = \pi + 2k\pi \Rightarrow \varphi = \frac{\pi + 2k\pi}{6}, \quad k \in \mathbb{Z}$$ mod 2π

$x_0 = \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$

$x_1 = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i$

$x_2 = \cos\frac{5}{6}\pi + i\sin\frac{5}{6}\pi = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$

$x_3 = \cos\frac{7}{6}\pi + i\sin\frac{7}{6}\pi = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$

$x_4 = -i$

$x_5 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$

$\varphi_0 = \frac{\pi}{6}$

$\varphi_1 = \frac{\pi + 2\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$

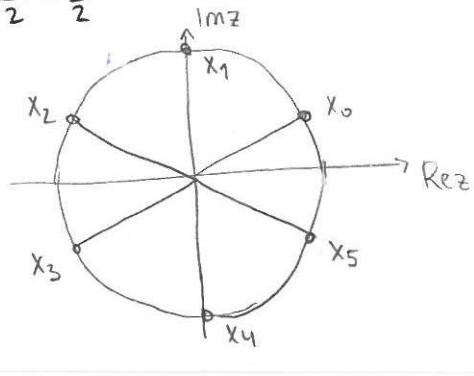
$\varphi_2 = \frac{\pi + 4\pi}{6} = \frac{5}{6}\pi$

$\varphi_3 = \frac{\pi + 6\pi}{6} = \frac{7}{6}\pi$

$\varphi_4 = \frac{\pi + 8\pi}{6} = \frac{3}{2}\pi$

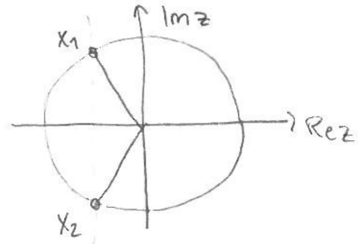
$\varphi_5 = \frac{\pi + 10\pi}{6} = \frac{11}{6}\pi$

$\varphi_6 = \frac{13}{6}\pi \underset{\text{mod } 2\pi}{=} \frac{\pi}{6} = \varphi_0$



b) $x^2 + x + 1 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{i^2 3}}{2} = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$$



5) Řešte v $\mathbb{R}$:

a) $|x+1| + |x-1| \geq 2$

$x+1 \geq 0$, $x-1 \geq 0$: $x \in \langle 1, \infty)$

$x+1 \leq 0$, $x-1 \geq 0$: $\emptyset$

$x+1 \geq 0$, $x-1 \leq 0$: $\boxed{x \in \langle -1, 1 \rangle}$

$x+1 \leq 0$, $x-1 \leq 0$: $x \in (-\infty, -1\rangle$

$x+1 + x-1 \geq 2$
$2x \geq 2$
$x \geq 1$

$x+1 - x+1 \geq 2$
$2 \geq 2$

$-x-1 -x+1 \geq 2$
$-2x \geq 2$
$x \leq -1$

$x \in \mathbb{R}$ je řešení (geometricky: súčet vzdialeností od -1 a od 1)

b) $|x-3| + |x+2| \leq 0$

abs. hodnota je vždy ≥ 0, možná len rovnosť: $x = 3 \wedge x = -2$

Nemá řešení v $\mathbb{R}$.

Výroky, množiny, zobrazení

Zabýváme se pouze výroky, o kterých má smysl říci, zda jsou pravdivé (1 nebo 0)

Výroková funkce (predikát) je předpis, který každému prvku z daného pole objektů přiřadí výrok.

Př. Výrok: Matematika je krásná.
Výroková fce: $P(x)$: x je krásná. $x \in M = \{$matematika, fyzika, ...$\}$

Logické spojky: negace $\neg$ (non), konjunkce $\wedge$, disjunkce $\vee$, implikace $\Rightarrow$, ekvivalence $\Leftrightarrow$.

Pravdivostní tabulka.

A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1	0
0	0	1	0	0	1	1

6. Dokažte, že platí

a) $A \Rightarrow A$, c) $A \Leftrightarrow A$, f) non (non A) $\Leftrightarrow A$

A	$A \Rightarrow A$	$A \Leftrightarrow A$	$\neg(\neg A)$	$\Leftrightarrow A$
1	1	1	1	1
0	1	1	0	1

a) ✓ c) ✓ f) ✓

d) $(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow (B \Leftrightarrow A)$, g) $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$, h) $(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Leftrightarrow \neg A)$

A	B	$d_1 = h_1$: $A \Leftrightarrow B$	d_2: $B \Leftrightarrow A$	$d_1 \Leftrightarrow d_2$	g_1: $A \Rightarrow B$	$\neg B$	$\neg A$	g_2: $\neg B \Rightarrow \neg A$	$g_1 \Leftrightarrow g_2$	h_2: $\neg B \Leftrightarrow \neg A$	$h_1 \Leftrightarrow h_2$
1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	1	0	0	1	0	1
0	1	0	0	1	1	0	1	1	1	0	1
0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

d) ✓ g) ✓ h) ✓

b) $(\overset{b_1}{A \Rightarrow B} \wedge \overset{b_2}{B \Rightarrow C}) \Rightarrow \overset{b_3}{(A \Rightarrow C)}$, e) $(\overset{e_1}{A \Leftrightarrow B} \wedge \overset{e_2}{B \Leftrightarrow C}) \Rightarrow \overset{e_3}{(A \Leftrightarrow C)}$

A	B	C	$A \Rightarrow B$	$B \Rightarrow C$	$b_1 \wedge b_2$	$A \Rightarrow C$	$(b_1 \wedge b_2) \Rightarrow b_3$	$A \Leftrightarrow B$	$B \Leftrightarrow C$	$e_1 \wedge e_2$	$A \Leftrightarrow C$	$(e_1 \wedge e_2) \Rightarrow e_3$
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	1
1	0	1	0	1	0	1	1	0	0	0	1	1
1	0	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1
0	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	0	1
0	1	0	1	0	0	1	1	0	0	0	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	1
0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

b) ✓ e) ✓

i) $(\overset{i_1}{\neg (A \vee B)}) \Leftrightarrow (\overset{i_2}{\neg A \wedge \neg B})$, j) $(\overset{j_1}{\neg (A \wedge B)}) \Leftrightarrow (\overset{j_2}{\neg A \vee \neg B})$

A	B	$A \vee B$	i_1	$\neg A$	$\neg B$	i_2	$i_1 \Leftrightarrow i_2$	$A \wedge B$	j_1	j_2	$j_1 \Leftrightarrow j_2$
1	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0	1
1	0	1	0	0	1	0	1	0	1	1	1
0	1	1	0	1	0	0	1	0	1	1	1
0	0	0	1	1	1	1	1	0	1	1	1

i) ✓ j) ✓

k) $(\overset{k_1}{\neg (A \Rightarrow B)}) \Leftrightarrow (\overset{k_2}{A \wedge \neg B})$, l) $(\overset{l_1}{\neg (A \Leftrightarrow B)}) \Leftrightarrow ((\overset{l_2}{A \wedge \neg B}) \vee (\overset{l_3}{B \wedge \neg A}))$

A	B	$A \Rightarrow B$	k_1	$\neg B$	k_2	$k_1 \Leftrightarrow k_2$	$A \Leftrightarrow B$	l_1	l_2	$\neg A$	l_3	$l_2 \vee l_3$	$l_1 \Leftrightarrow (l_2 \vee l_3)$
1	1	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	1
1	0	0	1	1	1	1	0	1	1	0	0	1	1
0	1	1	0	0	0	1	0	1	0	1	1	1	1
0	0	1	0	1	0	1	1	0	0	1	0	0	1

k) ✓ l) ✓

Obecný kvantifikátor: $\forall x \in M : P(x)$ (pro každý prvek x z množiny M platí výrok $P(x)$)

Existenční kvantifikátor: $\exists x \in M : P(x)$ (existuje prvek x z množiny M takový, že $P(x)$ platí)

Pozn. $\exists!$ (existuje právě jeden)

Platí: 1, $\neg(\forall x \in M\ P(x)) \Leftrightarrow (\exists x \in M\ \neg P(x))$

2, $\neg(\exists x \in M\ P(x)) \Leftrightarrow (\forall x \in M\ \neg P(x))$

7, Zapište negaci výroku

$\exists x \in \mathbb{R} : \cos x = \sqrt{1-\sin^2 x}$

a rozhodněte, který z výroků je pravdivý.

Negace: $\forall x \in \mathbb{R} : \cos x \neq \sqrt{1-\sin^2 x}$

$x = \frac{\pi}{2}$: $\cos x = 0 = \sqrt{1-\sin^2 x}$ $\Rightarrow$ první výrok je pravdivý např. pro $x = \frac{\pi}{2}$

$(\forall x : \cos x \geq 0 \}: \cos x = \sqrt{1-\sin^2 x}$

$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$

$1 = \cos^2 x + \sin^2 x$ ✓)

8, Platí následující výroky?

a) $\forall a \in \mathbb{R}\ \exists \varepsilon > 0\ \exists \alpha \in \mathbb{R}\ \forall x \in (a, a+\varepsilon) : x \in (a, a+\varepsilon) \Leftrightarrow |x-\alpha| < 1$

Výrok je pravdivý: $(a, a+\varepsilon) = (\alpha-1, \alpha+1)$

fix $a \in \mathbb{R}$, vol $\varepsilon = 2$ (délka intervalu) a $\alpha = a+1$ (střed)

b) $\exists a \in \mathbb{R}\ \forall \varepsilon > 0\ \forall \alpha \in \mathbb{R}\ \exists x \in (a, a+\varepsilon) : x \in (a, a+\varepsilon) \Leftrightarrow |x-\alpha| < 1$

Negace: $\forall a \in \mathbb{R}\ \exists \varepsilon > 0\ \exists \alpha \in \mathbb{R}\ \forall x \in (a, a+\varepsilon) : \neg \underbrace{(x \in (a, a+\varepsilon) \Leftrightarrow |x-\alpha| < 1)}_{P(x, a, \varepsilon, \alpha)}$

Už víme z a) že výrok $\forall a \in \mathbb{R}\ \exists \varepsilon > 0\ \exists \alpha \in \mathbb{R}\ \forall x \in (a, a+\varepsilon) : P(x, a, \varepsilon, \alpha)$ je pravdivý.

To ale nestačí (př. $\exists x : P(x)$ i $\exists x : \neg P(x)$ oboje mohou být pravda)

$\neg P(x, a, \varepsilon, \alpha) = (x \in (a, a+\varepsilon) \wedge |x-\alpha| \geq 1) \vee (x \notin (a, a+\varepsilon) \wedge |x-\alpha| < 1)$

fix $a \in \mathbb{R}$, vol $\varepsilon = 1$, $\alpha = a+3$: $x \in (a, a+1) \wedge |x-(a+3)| > 2$ (≥ 1)

Tj výrok nie je pravdivý.

9) Dokažte:

a) $C\setminus(A\cup B) = (C\setminus A)\cap(C\setminus B)$

$$x\in C\setminus(A\cup B) \iff x\in C \wedge x\notin(A\cup B)$$
$$\iff (x\in C\wedge x\notin A)\wedge(x\in C\wedge x\notin B)$$
$$\iff (x\in C\setminus A)\wedge(x\in C\setminus B) \iff x\in(C\setminus A)\cap(C\setminus B)$$

b) $C\setminus(A\cap B) = (C\setminus A)\cup(C\setminus B)$

$$x\in C\setminus(A\cap B) \iff x\in C \wedge x\notin(A\wedge B)$$
$$\iff (x\in C\wedge x\notin A)\vee(x\in C\wedge x\notin B) \iff x\in(C\setminus A)\cup(C\setminus B)$$

c) Nechť A_i, $i=1,2,\dots$ je systém libovolných množin a nechť $B_n=\bigcup_{i=1}^{n}A_i$. Potom $\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n=\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n$.

Dk: $B_N=\bigcup_{i=1}^{N}A_i \Rightarrow B_1\subset B_2\subset\dots$

$$\bigcup_{i=1}^{N}A_i = B_N = \bigcup_{i=1}^{N}B_i \qquad \forall N\in\mathbb{N}$$

nebo: $[(A=B)\iff(A\subset B\wedge B\subset A)]$

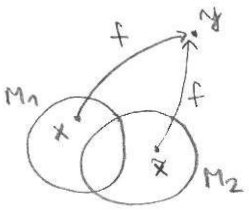
„$\subset$" $x\in\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n \Rightarrow \exists i\in\mathbb{N}: x\in A_i \Rightarrow x\in B_i \Rightarrow x\in\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n$

„$\supset$" $x\in\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n \Rightarrow \exists j\in\mathbb{N}: x\in B_j=\bigcup_{i=1}^{j}A_i \Rightarrow x\in\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$

10) Dokažte, že je-li f zobrazení, pak $f(M_1)\setminus f(M_2)\subset f(M_1\setminus M_2)$.
Kdy platí rovnost? (M_1, M_2 jsou podmnožiny $\mathcal{D}_f$)

Dk: $y\in f(M_1)\setminus f(M_2) \iff y\in f(M_1)\wedge y\notin f(M_2)$

$$\iff (\exists x\in M_1: y=f(x))\wedge(\forall x\in M_2: y\neq f(x))$$



! $\Rightarrow \exists x\in M_1\setminus M_2: y=f(x)$

$$\iff y\in f(M_1\setminus M_2)$$

Rovnost? f prosté: $x_1\neq x_2\Rightarrow f(x_1)\neq f(x_2)$ $\quad \big(\iff (f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow x_1=x_2)\big)$

! „$\Leftarrow$": $(\exists x\in M_1\setminus M_2: y=f(x)) \overset{\text{prostota}}{\wedge} (\forall\tilde{x}\in\mathcal{D}_f;\ \tilde{x}\neq x\Rightarrow f(\tilde{x})\neq f(x)=y)$

$$\Rightarrow (\exists x\in M_1: y=f(x))\wedge(\forall x\in M_2: f(x)\neq y)$$

Množina je soubor prvků, u kterých lze rozhodnout, zda do dané množiny patří, či nikoliv.

Množiny zadáváme:
- výčtem prvků ($M = \{1,2,3\}$)
- zadáním vlastností prvků ($M = \{n : n \text{ je prvočíslo}\}$)
- pomocí už známé množiny ($M = \mathbb{N} \cap \langle 1,3 \rangle$)

Značení:

(i) $x \in M$ (x patří do množiny M) (je prvkem M)
$x \notin M$ nepatří není

(ii) $P \subset M \iff \forall p \in P \; p \in M$ (podmnožina)

(iii) $P = M \iff (P \subset M) \wedge (M \subset P)$ (rovnost množin)

(iv) $P \cup M = \{x : (x \in M) \vee (x \in P)\}$ (sjednocení množin)

(v) $P \cap M = \{x : (x \in M) \wedge (x \in P)\}$ (průnik množin)

(vi) $P \subsetneq M \iff (P \subset M) \wedge (P \neq M)$ (vlastní podmnožina)

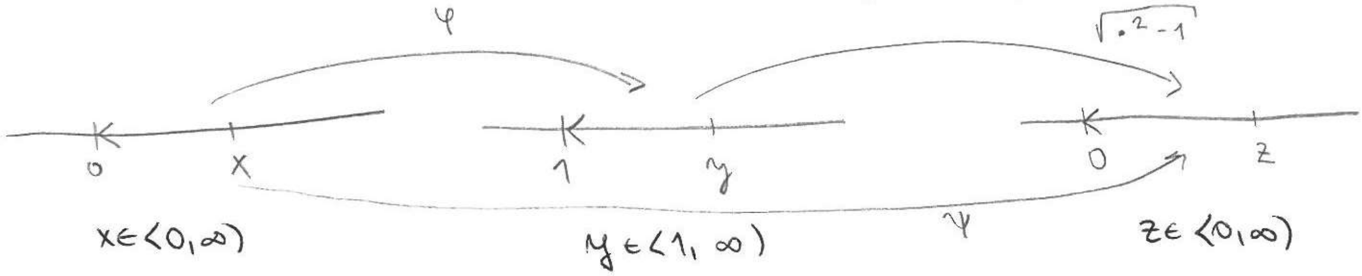
(vii) $\emptyset$ prázdná množina (je podmnožinou každé množiny)

(viii) $M \setminus P = \{x \in M : x \notin P\}$

Zobrazení: Nechť A, B, D jsou množiny a $D \subset A$. Nechť každému prvku $x \in D$ je přiřazeno právě jedno $y_x \in B$. Označme $\varphi(x) := y_x$.
Pak říkáme, že $\varphi : A \to B$ je zobrazení z množiny A do množiny B.
Množinu D nazýváme definičním oborem φ a značíme ji $\mathcal{D}_\varphi$.
Množina $\varphi(D) := \{\varphi(x) : x \in D\}$ se nazývá obor hodnot φ (R_φ).
Množina $\varphi^{-1}(\{y\}) := \{x \in D : \varphi(x) = y\}$ se nazývá vzorem prvku y.
Jestliže $x_1 \neq x_2 \Rightarrow \varphi(x_1) \neq \varphi(x_2)$, φ se nazývá prosté (injektivní).
Je-li $R_\varphi = B$, řekneme, že $\varphi : A \to B$ je na (surjektivní).
Je-li φ prosté a na, říkáme, že φ je vzájemně jednoznačné (bijektivní).

11, Nechť $\varphi : [0,\infty) \to [1,\infty)$ je bijekce a nechť $\psi(x) = \sqrt{\varphi(x)^2-1}$.

Dokažte, že existuje inverzní funkce ψ^{-1} a vyjádřete ji pomocí φ^{-1}. Určete $D_{\psi^{-1}}$.



φ bijekce $\iff \forall y \in \langle 1, \infty) \; \exists! \, x \in \langle 0, \infty) : \; y = \varphi(x)$ (1)

$y \geq 1 \implies \varphi^2(x) - 1 \geq 0 \quad \forall x \in \langle 0, \infty) \implies \sqrt{\varphi(x)^2-1}$ definovaná jednoznačně $\forall x \in \langle 0, \infty)$

$\implies \forall z \in \langle 0, \infty) \; \exists! \, y \in \langle 1, \infty) : \; z = \sqrt{y^2-1}$ (2)

$\overset{z \geq 0}{\iff} z^2 = y^2 - 1 \iff z^2 + 1 = y^2 \overset{y \geq 0}{\iff} y = \sqrt{z^2+1}$

$(1) + (2) \implies \forall z \in \langle 0, \infty) \; \exists! \, x \in \langle 0, \infty) : \; z = \sqrt{\varphi(x)^2 - 1}$.

$z = \psi(x)$ je tedy bijekce a proto má inverzní zobrazení.

$\varphi(x) = y = \sqrt{z^2+1}$

$x = \varphi^{-1}(\varphi(x)) = \varphi^{-1}(\sqrt{z^2+1}) = \psi^{-1}(z)$ je hledaná inverze.

$D_{\psi^{-1}} = R_{\psi} = \langle 0, \infty)$.