Domácí úkol č. 9

Zadáno: 9. 12.
Deadline: 16. 12.

Nalezněte intervaly, kde je funkce konvexní a konkávní a nalezněte inflexní body:

1.
$$f(x) = x \sin \ln x$$

2.
$$f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{x^2+1}$$

Řešení

1. Definičním oborem funkce $f(x)$ je $\mathbb{R}^+$. Spočítáme první a druhou derivaci:

$$f'(x) = \sin \ln x + x(\cos \ln x)\frac{1}{x} = \sin \ln x + \cos \ln x$$
$$f''(x) = (\cos \ln x)\frac{1}{x} - (\sin \ln x)\frac{1}{x} = \frac{\cos \ln x - \sin \ln x}{x}$$

pro $x \in \mathbb{R}^+$. Inflexní body najdeme vyřešením rovnice

$$\cos \ln x - \sin \ln x = 0.$$

Položíme $y = \ln x$ a z vlastností funkcí sinus a cosinus zjistíme, že $\cos y = \sin y$ pro $y = \frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Zároveň snadno vidíme, že funkce $\cos y - \sin y$ je kladná pro $y \in (-\frac{3\pi}{4} + 2k\pi, \frac{\pi}{4} + 2k\pi)$ a záporná pro $y \in (\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{5\pi}{4} + 2k\pi)$. Odtud už lehce odvodíme, že $f(x)$ je konvexní na intervalech $(\mathrm{e}^{-\frac{3\pi}{4}+2k\pi}, \mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}+2k\pi})$ a konkávní na intervalech $(\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}+2k\pi}, \mathrm{e}^{\frac{5\pi}{4}+2k\pi})$, $k \in \mathbb{Z}$. Body $x = \mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}+k\pi}$ jsou inflexní.

2. Definičním oborem $f(x)$ jsou všechna reálná čísla. Spočítáme opět první dvě derivace

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= -\frac{1}{1+\left(\frac{1}{x^2+1}\right)^2}\frac{2x}{(x^2+1)^2} = \frac{-2x}{(x^2+1)^2+1}\\
f''(x) &= \frac{-2(x^2+1)^2-2+2x2(x^2+1)2x}{((x^2+1)^2+1)^2} = \frac{8x^2(x^2+1)-2(x^2+1)^2-2}{((x^2+1)^2+1)^2}\\
&= \frac{8x^4+8x^2-2x^4-4x^2-4}{((x^2+1)^2+1)^2} = \frac{6x^4+4x^2-4}{((x^2+1)^2+1)^2}
\end{aligned}
$$

pro $x \in \mathbb{R}^+$. K nalezení inflexních bodů potřebujeme vyřešit rovnici

$$6x^4+4x^2-4=0.$$

Zavedením $y = x^2$ dostáváme kořeny $y_{1,2} = \frac{-4\pm\sqrt{16+96}}{12} = \frac{-1\pm\sqrt{7}}{3}$. Záporný kořen nám nedá žádné reálné x, z kladného kořene dostáváme inflexní body

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{7}-1}{3}}.$$

Jednoduchou úvahou pak dojdeme k tomu, že pro $x < -\sqrt{\frac{\sqrt{7}-1}{3}}$ a $x > \sqrt{\frac{\sqrt{7}-1}{3}}$ je druhá derivace $f(x)$ kladná a funkce tam tedy je konvexní, zatímco pro $|x| < \sqrt{\frac{\sqrt{7}-1}{3}}$ je druhá derivace záporná a funkce tam je konkávní.