

## Domácí úkol č. 5

Zadáno: 11. 11.

Deadline: 18. 11.

Nalezněte následující primitivní funkce na maximálních možných intervalech. Určete i tyto intervaly.

1.

$$\int \frac{1}{\sin x} dx$$

Hint: K cíli vede substituce  $t = \varphi(x)$  pro  $\varphi$ , kterou v zadání nevidíte. Dále se vám může hodit identita  $\frac{1}{t^2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}\right)$ .

2.

$$\int \sin(\ln x) dx$$

Hint: Zkuste substituci  $t = \ln x$ .

## Řešení

1.

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{1}{\sin x} dx = \int \frac{\sin x}{1 - \cos^2 x} dx = \left| \begin{array}{l} t = \cos x \\ dt = -\sin x dx \end{array} \right| \\ &= \int \frac{1}{t^2 - 1} dt = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t-1} - \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t+1} \\ &= \frac{1}{2} (\ln |t-1| - \ln |t+1|) + C = \ln \left( \frac{|t-1|}{|t+1|} \right)^{\frac{1}{2}} + C \\ &= \ln \left( \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}} \right) + C = \ln \left| \operatorname{tg} \left( \frac{x}{2} \right) \right| + C \end{aligned}$$

pro  $x \in (k\pi, \pi + k\pi)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

2.

$$\begin{aligned} I &= \int \sin(\ln x) dx = \left| \begin{array}{l} t = \ln x \\ dt = \frac{1}{x} dx \end{array} \right| = \int \sin t e^t dt \\ &= \left| \begin{array}{l} f' = \sin t \quad g = e^t \\ f = -\cos t \quad g' = e^t \end{array} \right| = -\cos t e^t + \int \cos t e^t dt \\ &= \left| \begin{array}{l} f' = \cos t \quad g = e^t \\ f = \sin t \quad g' = e^t \end{array} \right| = -\cos t e^t + \sin t e^t - \int \sin t e^t dt. \end{aligned}$$

Proto

$$I = e^t(\sin t - \cos t) - I$$

$$I = \frac{1}{2} e^t(\sin t - \cos t) + C = \frac{x}{2} (\sin(\ln x) - \cos(\ln x)) + C$$

pro  $x \in (0, +\infty)$ .