

## Domácí úkol č. 4

Zadáno: 4. 11.

Deadline: 11. 11.

1. Vypočtete derivaci následující funkce v libovolném bodě  $x$ , kde derivace existuje, a tyto body určete:

$$f(x) = \ln(e^x + \sqrt{1 + e^{2x}}).$$

2. Odvoďte (= poskytněte alespoň náznak důkazu) vzorec pro  $n$ -tou derivaci součinu dvou funkcí

$$(f \cdot g)^{(n)} = \dots$$

a pomocí něj spočítejte  $f^{(50)}(x)$  je-li  $f(x) = x^2 \sin 2x$ .

### Řešení

1.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{e^x + \sqrt{1 + e^{2x}}} \left( e^x + \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{1 + e^{2x}}} e^{2x} \cdot 2 \right) \\ &= \frac{1}{e^x + \sqrt{1 + e^{2x}}} \frac{e^x (\sqrt{1 + e^{2x}} + e^x)}{\sqrt{1 + e^{2x}}} \\ &= \frac{e^x}{\sqrt{1 + e^{2x}}}, \end{aligned}$$

pro  $x \in \mathbb{R}$ .

2. Platí Leibnizova formule

$$(f \cdot g)^{(n)} = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} f^{(n-i)} g^{(i)},$$

která se dokáže matematickou indukcí stejně jako binomická věta (viz druhé cvičení).

Volbou  $f(x) = \sin 2x$  a  $g(x) = x^2$  lehce zjistíme, že z celé sumy obsahující 51 sčítanců zůstanou nenulové jen první tři členy, protože třetí a vyšší derivace  $g$  jsou nulové. Zároveň platí

$$f^{(2k)}(x) = (-1)^k \cdot 2^{2k} \sin 2x \qquad f^{(2k+1)}(x) = (-1)^k \cdot 2^{2k+1} \cos 2x$$

a proto

$$\begin{aligned}(x^2 \sin 2x)^{(50)} &= -2^{50} x^2 \sin 2x + 50 \cdot 2^{49} \cdot 2x \cos 2x + \frac{50 \cdot 49}{2} 2^{48} \cdot 2 \sin 2x \\ &= 2^{49} (100x \cos 2x + (1225 - 2x^2) \sin 2x)\end{aligned}$$