Domácí úkol č. 1

Zadáno: 7. 10.
Deadline: 14. 10.

1. Dokažte matematickou indukcí
$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} \leq 2\sqrt{n}.$$

2. Nechť $A, B \subset \mathbb{R}$ jsou neprázdné shora omezené množiny. Dokažte
$$\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}.$$

3. Nechť $A, B \subset \mathbb{R}$ jsou neprázdné shora omezené množiny. Najděte protipříklad k (neplatnému) tvrzení
$$\sup(A \cap B) = \min\{\sup A, \sup B\}.$$
Platí alespoň nějaká nerovnost ($\leq$, $\geq$)? Pokud ano, dokažte ji.

Řešení

1. a) $n = 1$: $1 \leq 2$ platí

   b) $k \Rightarrow k + 1$:
$$\sum_{i=1}^{k+1} \frac{1}{i} = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i} + \frac{1}{k+1} \leq 2\sqrt{k} + \frac{1}{k+1} \quad \text{podle indukčního předpokladu}$$
   Zbývá ukázat
$$2\sqrt{k} + \frac{1}{k+1} \leq 2\sqrt{k+1} \tag{1}$$
   To je totéž co
$$\frac{1}{k+1} \leq 2(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) = \frac{2}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}} \tag{2}$$
   Ovšem pro libovolné přirozené číslo m platí $\sqrt{m} \leq m$ a proto
$$\sqrt{k+1} + \sqrt{k} \leq \sqrt{k+1} + \sqrt{k+1} = 2\sqrt{k+1} \leq 2(k+1),$$
   což je ekvivalentní (2).

2. Označme $S_A := \sup A, S_B := \sup B, S := \sup(A \cup B)$. Dokážeme $S = \max\{S_A, S_B\}$. Definice suprema:

   1) $\forall x \in (A \cup B) : x \leq \max\{S_A, S_B\}$

   To je ale jasné, buď $x \in A$ a pak z definice suprema množiny A platí $x \leq S_A \leq \max\{S_A, S_B\}$, a nebo $x \in B$ a pak $x \leq S_B \leq \max\{S_A, S_B\}$.

   2) $\forall y < \max\{S_A, S_B\} \exists x_0 \in (A \cup B) : x_0 > y$

   Nechť $y < \max\{S_A, S_B\}$. Potom buď $y < S_A$ nebo $y < S_B$. Jestli $y < S_A$, pak z definice suprema množiny A existuje $x_A \in A$ tak, že $x_A > y$. Stačí vzít $x_0 := x_A$. Analogicky pro případ $y < S_B$.

3. Protipříklad může být $A = \{1, 2\}$, $B = \{1, 3\}$. Očividně $\sup A = 2$, $\sup B = 3$, $\sup(A \cap B) = 1 < \min\{\sup A, \sup B\} = 2$.

   Platí ovšem $\sup(A \cap B) \leq \min\{\sup A, \sup B\}$ za předpokladu, že $A \cap B \neq \emptyset$ (supremum prázdné množiny v $\mathbb{R}$ neexistuje).

   Důkaz: Stačí ukázat, že $\min\{\sup A, \sup B\}$ je horní závora množiny $A \cap B$. Ovšem pro každý prvek $x \in A \cap B$ platí zároveň $x \leq \sup A$ a $x \leq \sup B$ a proto $x \leq \min\{\sup A, \sup B\}$. Supremum množiny $A \cap B$ je potom nejmenší horní závorou (z druhé části definice suprema) a proto platí nerovnost, kterou jsme chtěli dokázat.