

PÍSEMNÁ ČÁST ZKOUŠKY: 15. PROSINCE 2025

Rady a pokyny

- Definujte **veškeré značení, které používáte** (pokud není definováno v zadání).
- Nezapomínejte, že většina metod a výsledků předpokládá cosi o zúčastněných náhodných veličinách.
- Máte-li stanovit *podmínky* nebo předpoklady pro nějaké tvrzení, udělejte je *co nejméně omezující*.
- Snažíte-li se dokázat určité tvrzení, *můžete používat jiná tvrzení, aniž byste je museli dokazovat*. Použitá tvrzení uveďte i s jejich předpoklady a tyto předpoklady ověřte. Nemusíte formulovat následující tvrzení: *zákon velkých čísel, centrální limitní věta, Cramérova-Sluckého věta, věta o spojitě transformaci a Δ -metoda*.

1. Definujte multinomické rozdělení a určete jeho střední hodnotu. [3]
2. Nechť $\bar{X}_n$ je výběrový průměr náhodného výběru $X_1, \dots, X_n$ z Poissonova rozdělení $\text{Po}(\lambda_X)$. Určete c takové, že $\bar{X}_n^{1/2}$ konverguje v pravděpodobnosti k c . Určete asymptotické rozdělení $\sqrt{n}(\bar{X}_n^{1/2} - c)$ a použijte je k odvození intervalového odhadu pro λ_X .
Můžete využít toho, že $E X_i = \lambda_X$ a $\text{var} X_i = \lambda_X$. [7]
3. Zkonstruuje **jednostranný** interval spolehlivosti pro střední hodnotu normálně rozdělených dat. Zdůvodněte dodržení příslušného pokrytí (přesného nebo asymptotického). [4]
4. Shrňte předpoklady testu o střední hodnotě ve výběru z *normálního* rozdělení s rozptylem 15^2 (rozdělení IQ v populaci). Uvažujte **jednostrannou** nulovou hypotézu a odpovídající alternativu. Definujte testovou statistiku, kritický obor a uveďte vzorec pro výpočet p-hodnoty. Je tento test přesný nebo asymptotický?

Definujte hladinu testu a podrobně vysvětlete (**včetně odvození potřebného rozdělení testové statistiky**), že tento test dodržuje (přesně nebo asymptoticky) předepsanou hladinu. [8]

OTOČ!

5. V obcích *Horní Pěna* a *Číměř* byl proveden průzkum volebních preferencí, ve kterém respondenti vybírali z osmi možností: *SPOLU*, *STAN*, *Piráti*, *ANO*, *SPD+*, *Motoristé sobě*, *Stačilo!*, *Jiné uskupení*. Navrhněte test hypotézy, že mezi zmíněnými obcemi není rozdíl ve volebních preferencích.

- Zaveďte značení (matematickou reprezentaci dat), zformulujte předpoklady (model) a testované hypotézy.
- Uveďte testovou statistiku a její rozdělení za nulové hypotézy. Je toto rozdělení přesné nebo asymptotické?
- Uveďte kritický obor testu a vzorec pro výpočet p-hodnoty.
- Zformulujte závěr, pokud je dosažená p-hodnota $p = 0,09$ a test má být proveden na hladině $\alpha = 0,05$.

[8]