Počítačová algebra - cvičení

22. května 2020

Problém 1. Spočítejte $\mathrm{NSD}_{\mathbb{Z}[x]}(2x^2+x-1, 2x^3-x^2-5x-2)$ pomocí modulární metody s jedním prvočíslem.
Pro připomenutí, ať $f = \sum_{i=0}^{m} f_i x^i, g = \sum_{j=0}^{n} g_j x^j, n \leq m$. Pak

$$|\mathrm{mc}(\mathrm{NSD}(f,g))| \leq 2^n \cdot |\,\mathrm{NSD}(f_m, g_n)| \cdot \min\left(\frac{\|f\|_2}{|f_m|}, \frac{\|g\|_2}{|g_n|}\right),$$

kde ztotožňujeme polynom s vektorem koeficientů.

Problém 2. Spočítejte $\mathrm{NSD}_{\mathbb{Z}[x]}(2x^2-x-1, 2x^3-x^2-5x-2)$ pomocí modulární metody s více prvočísly.

Problém 3. Pro polynomy $f, g \in \mathbb{Z}[x]$ platí

$$\mathrm{NSD}_{\mathbb{Z}[x]}(f,g) \bmod p \mid \mathrm{NSD}_{\mathbb{Z}_p[x]}(f \bmod p, g \bmod p) \quad \text{a}$$

$$\mathrm{lc}(\mathrm{NSD}_{\mathbb{Z}[x]}(f,g)) \mid \mathrm{NSD}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{lc}\, f, \mathrm{lc}\, g).$$

Formulujte a dokažte analogická pozorování pro polynomy ze $\mathbb{Z}[x,y] = (\mathbb{Z}[y])[x]$.

Problém 4. Spočítejte

$$\mathrm{NSD}(y^6 + xy^5 + x^3y - xy + x^4 - x^2, xy^5 - 2y^5 + x^2y^4 - 2xy^4 + xy^4 + xy^2 + x^2y).$$

Problém 5. Dokažte z definice, že pro $f, g \in \mathbb{Z}[x], n = \max(\deg f, \deg g)$ s maximálním koeficientem a je

$$\ell(\mathrm{res}(f,g)) = \mathcal{O}(n \log(an)).$$