Lemma: Buď $\varphi: \mathbb{N}\times\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definované pro $k, l \in \mathbb{N}$:

$$\varphi(k,l) = 2^{k+l} + k.$$ Pak je φ prosté.

Dk: Platí $k+l > k$ pro $k, l \in \mathbb{N}$.

Ať je tedy $s \in \varphi(\mathbb{N}\times\mathbb{N})$. Hledáme $k, l \in \mathbb{N}$ tak, že $s = \varphi(k,l)$ a zároveň chceme ukázat, že taková k, l jsou jediná.

Najdeme nejdříve $r \in \mathbb{N}$ takové, že $2^r < s \le 2^{r+1}$.

Existuje, protože $s \in \varphi(\mathbb{N}\times\mathbb{N})$ a tedy $s \ge 4$.

- Pro všechna $k, l \in \mathbb{N}$ splňující $\varphi(k,l) = s$ musí platit $r = k+l$. Jinými slovy nemůže být $k+l > r$. Pak by totiž nastal spor s $s \le 2^{r+1} \le 2^{k+l} < 2^{k+l} + k = s$.

  Také nemůže nastat $k+l < r$. Pak by totiž platilo $2^{k+l} \le 2^{r-1} < 2^r < s$ a $k = s - 2^{k+l} > 2^r - 2^{r-1} = 2^{r-1} \ge 2^{k+l} > 2^k$.

  To vede ke sporu s výrokem $\forall k \in \mathbb{N}: k < 2^k$, který se snadno ověří matematickou indukcí.

- Jediná možnost musí být $k = s - 2^r$ a $l = r - k$. $\perp$

Pozn:
- Všimněte si, že zobrazení φ není na: např. $\varphi^{-1}(3) = \emptyset$, $\varphi^{-1}(15) = \emptyset$
- Podrobněji: $s \in \varphi(\mathbb{N}\times\mathbb{N})$, pokud $s \ge 5 \wedge r - k > 0$ a (r z důk. nahoře)
- $\psi(k,l) := 2^k 3^l$ je další zobrazení z $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ do $\mathbb{N}$, které je prosté.