

Další příklad na aplikaci reziduové věty

$$5) I := \int_0^{+\infty} \frac{\ln^2 x}{\underbrace{(1+x^3)}_{f(x)}} dx$$

- integrál konverguje : f spadá na $(0, +\infty)$
 $n \rightarrow 0^+$: srovnáme s $\frac{1}{\sqrt{x}}$
 $n \rightarrow +\infty$: srovnáme s $\frac{1}{x^2}$

- Pro $z \in \mathbb{C} \setminus [0, +\infty)$ definujeme :

$$A(z) \in \text{Arg}(z) \cap (0, 2\pi)$$

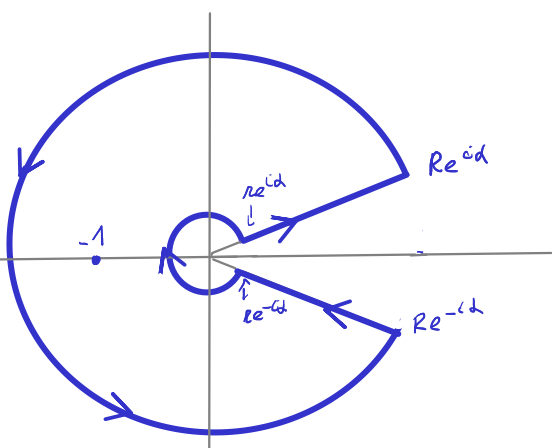
$$L(z) := \ln|z| + i A(z) \quad (\text{př } L(z) \in \text{Log}(z))$$

$$\text{Uvažme funkci } g(z) := \frac{(L(z))^3}{(1+z)^3} \quad \text{Př } g \text{ je holomorfní}$$

$$\text{na } \mathbb{C} \setminus ([0, +\infty) \cup \{-1\})$$

$$-1 \text{ je pól (množina 3)}$$

- Pro $R \in (0, 1)$, $R > 1$, $d \in (0, \frac{\pi}{2})$ uvažme cestu $\gamma_{R,d}$:



$$\gamma_{R,d} = [Re^{id}, Re^{id}] + \gamma_{R,d} + [Re^{-id}, Re^{-id}] + (-\gamma_{R,d})$$

$$\text{kde } \gamma_{R,d}(t) = se^{it}, \quad t \in [d, \pi-d]$$

- Dle reziduové věty

$$\int_{\gamma_{R,d}} g = 2\pi i \cdot \text{res}_{-1} g$$

$$\left[\begin{array}{l} \Omega = \mathbb{C} \setminus [0, +\infty) \text{ uzavřený} \\ K = \{-1\} \end{array} \right]$$

$$\text{Společné reziduum: } \text{res}_{-1} g = \lim_{\substack{z \rightarrow -1 \\ \text{vzhledem k W.4(1)}}} \frac{1}{2} ((z+1)^3 g(z))' = \lim_{z \rightarrow -1} \frac{1}{2} (L^3(z))' =$$

$$= \lim_{z \rightarrow -1} \frac{1}{2} (3L^2(z) \cdot \frac{1}{z})' = \lim_{z \rightarrow -1} \frac{1}{2} (6L(z) \cdot \frac{1}{z^2} + 3L^2(z) \cdot (-\frac{1}{z^3})) \Big|_{z=-1}$$

$$L'(z) = \frac{1}{z}$$

$$= \frac{1}{2} (6L(1) - 3L^2(-1)) = \frac{1}{2} (6i\pi + 3\pi^2) = \frac{3}{2}\pi^2 + 3i\pi$$

$$\text{Tag} \quad \oint \gamma_{R,d} = 3\pi^3 i - 6\pi^2$$

- Společně limity pro $d \rightarrow 0+$ a pro $R \rightarrow 0+$, $R \rightarrow +\infty$

$$\int_{\gamma_{S,d}} g = \int_0^{2\pi-d} g(se^{it}) i se^{it} dt = \int_0^{2\pi-d} \frac{t^3 (se^{it})}{(1+se^{it})^3} i se^{it} dt = \int_0^{2\pi-d} \frac{(\ln s + it)^3}{(1+se^{it})^3} i se^{it} dt$$

$$\xrightarrow{d \rightarrow 0+} \int_0^{2\pi} \frac{(\ln s + it)^3}{(1+se^{it})^3} i se^{it} dt$$

$$s \rightarrow +\infty \quad \left| \int_0^{2\pi} \dots \right| \leq \int_0^{2\pi} \left| \dots \right| \leq \int_0^{2\pi} \frac{(|\ln s| + |t|)^3}{|s-1|^3} \cdot s dt \leq 2\pi \cdot \frac{(\ln s + 2\pi)^3}{|s-1|^3} \xrightarrow{s \rightarrow +\infty} 0$$

$$s \rightarrow 0+ \quad \left| \int_0^{2\pi} \dots \right| \leq \int_0^{2\pi} \left| \dots \right| \leq \int_0^{2\pi} \frac{(|\ln s| + |t|)^3}{(1-s)^3} s dt \leq 2\pi \cdot \frac{(|\ln s| + 2\pi)^3}{(1-s)^3} \xrightarrow{s \rightarrow 0+} 0$$

$$\text{Tag:} \quad \lim_{R \rightarrow +\infty} \lim_{d \rightarrow 0+} \int_{\gamma_{R,d}} g = 0, \quad \lim_{R \rightarrow 0+} \lim_{d \rightarrow 0+} \int_{\gamma_{R,d}} g = 0$$

$$\int_{[\ln^d, R e^{it}]} g = \int_{\ln^d}^R g(se^{it}) e^{it} ds = \int_0^R \frac{t^3 (se^{it})}{(se^{it} + 1)^3} e^{it} ds = \int_0^R \frac{(\ln s + it)^3}{(se^{it} + 1)^3} e^{it} ds$$

$$\xrightarrow{d \rightarrow 0+} \int_{\ln^d}^R \frac{\ln^3 s}{(s+1)^3} ds$$

Lebesgueova věta, nejmenší majorantu $\frac{(|\ln s| + 2\pi)^3}{|1-s|^3}$

$$\int_{[R e^{-it}, \ln^d]} g = - \int_{[\ln^d, R e^{-it}]} g = - \int_{\ln^d}^R \frac{t^3 (se^{-it})}{(se^{-it} + 1)^3} e^{-it} ds = - \int_{\ln^d}^R \frac{(\ln s + i(2\pi-d))^3}{(se^{-it} + 1)^3} e^{-it} ds$$

$$\xrightarrow{d \rightarrow 0+} - \int_{\ln^d}^R \frac{(\ln s + 2\pi i)^3}{(s+1)^3} ds$$

Leb. věta
stým informací pro yte

Pro $R \rightarrow +\infty, R \rightarrow 0+$ dostaneme píšliv: $\int_0^{\infty} \frac{\ln^3 s - (\ln s + 2\pi i)^3}{(s+1)^3} ds = \int_0^{+\infty} \frac{-3\ln^2 s \cdot 2\pi i - 3\ln s (2\pi i)^2 - (2\pi i)^3}{(s+1)^3} ds$

$$\text{Numekey:} \quad -6\pi^2 + 3\pi^3 i = \int_0^{\infty} \frac{\ln^3 s - (\ln s + 2\pi i)^3}{(s+1)^3} ds$$

$$= -6\pi^2 \underbrace{\int_0^{\infty} \frac{\ln^2 s}{(s+1)^3} ds}_I + 12\pi^2 \int_0^{\infty} \frac{\ln s}{(s+1)^3} ds + 8\pi^3 \underbrace{\int_0^{\infty} \frac{1}{(s+1)^3} ds}_{= \left[-\frac{1}{2(s+1)^2} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{2}}$$

Platí tedy: $3\pi^3 = -6\pi^2 I + 8\pi^3 \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow I = \frac{\pi^2}{6}$

Mimc vypočítáme $-6\pi^2 = 12\pi^2 \int_0^{\infty} \frac{\ln s}{(s+1)^3} ds$, tedy $\int_0^{\infty} \frac{\ln s}{(s+1)^3} ds = -\frac{1}{2}$

Podobná metoda funkcí pro $\int_0^{\infty} \ln^k x \cdot \frac{P(x)}{Q(x)} dx$, kde P, Q jsou polynomy,
pro které integrál konverguje
a $k \in \mathbb{N}$

Pak už je možné psát $g(z) = \int_0^{\infty} \ln^{k+1}(x) \frac{P(x)}{Q(x)} dx$

Pro $z=1$ uvažujeme $\int_0^{\infty} \ln^2(x) \frac{P(x)}{Q(x)} dx$

Pro vyšší k budeme potřebovat integrály s menší mocninou.