

Další aplikace reziduové věty

⑦ $I := \int_0^{\infty} \frac{x^a}{(x^2+1)^2} dx, \quad a \in (-1, 3) \setminus \mathbb{Z}.$

• Integral konverguje: o funkce je spojitá na $(0, +\infty)$

o k 0+ srovnáme s x^a , tedy konverguje, protože $a > -1$

o k $+\infty$ srovnáme s x^{a-4} , tedy konverguje, protože $a-4 < 3-4 = -1$

• provedeme substituci $x = e^t, t \in (-\infty, \infty).$

Dostaneme $I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{at} \cdot e^t}{(e^{2t}+1)^2} dt$

Uvažme funkci $g(z) = \frac{e^{az} \cdot e^z}{(e^{2z}+1)^2}$. Pak g je holomorfní na $\mathbb{C} \setminus \{z; e^{2z}+1=0\}$

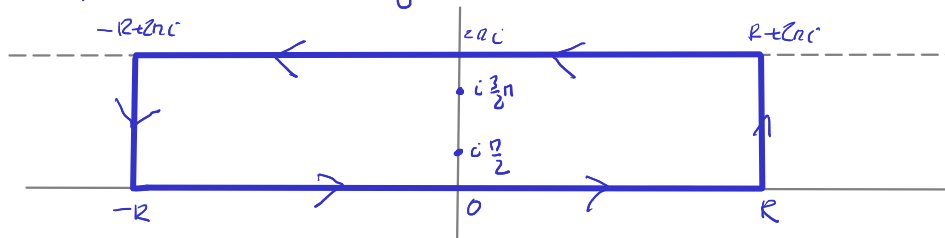
počítáme:
$$\left. \begin{aligned} e^{2z}+1 &= 0 \\ e^{2z} &= -1 \\ 2z &= i\pi + 2k\pi i \\ z &= i\frac{\pi}{2} + k\pi i \end{aligned} \right\} \Rightarrow g \text{ holomorfní na } \mathbb{C} \setminus \{i\frac{\pi}{2} + 2\pi k i, k \in \mathbb{Z}\}$$

Ve vyjádření bodů má g póly násobnosti 2

Γ $e^{2z}+1$ má v těchto bodech řadu nás. 1 (dělíme je $e^{2z} \cdot z \neq 0$)

$\Rightarrow (e^{2z}+1)^2$ má řadu nás. 2; čitatel nemá řadu

• Uvažme dráhu $\gamma_R = [-R, R] \cup [R, R+2\pi i] \cup [R+2\pi i, -R+2\pi i] \cup [-R+2\pi i, -R]$,
s dráhou orientací obvod obdelníku



Podle reziduové věty je $\int_{\gamma_R} g = 2\pi i (\text{Res}_{i\frac{\pi}{2}} g + \text{Res}_{\frac{3}{2}\pi i} g)$

Bud' použijeme Větu 1.3 ... $\mathcal{L} = \mathbb{C}$, $\Pi = \{i\frac{\pi}{2} + k\pi i, k \in \mathbb{Z}\}$ (zabýváme
nebo Větu 1.3

$\mathcal{L} = \{z \in \mathbb{C}; \text{Im } z \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})\}$ kvadrantů

$\Pi = \{i\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi i\}$

Späť k tomu čo reziduá:

$$\text{res}_{i\frac{\pi}{2}} g \stackrel{\text{Věta IV.4(1)}}{=} \lim_{z \rightarrow i\frac{\pi}{2}} \left((z - i\frac{\pi}{2})^2 \cdot f(z) \right)' = \lim_{z \rightarrow i\frac{\pi}{2}} \left((z - i\frac{\pi}{2})^2 \frac{e^{(a+1)z}}{(e^{2z} + 1)^2} \right)'$$

$$= \lim_{z \rightarrow i\frac{\pi}{2}} \frac{(2(z - i\frac{\pi}{2}) e^{(a+1)z} + (z - i\frac{\pi}{2})^2 e^{(a+1)z} \cdot (a+1)) (e^{2z} + 1)^2 - (z - i\frac{\pi}{2})^2 e^{(a+1)z} \cdot 2(e^{2z} + 1) \cdot e^{2z} \cdot 2}{(e^{2z} + 1)^4}$$

$$= \lim_{z \rightarrow i\frac{\pi}{2}} \underbrace{e^{(a+1)z}}_{e^{i(a+1)\frac{\pi}{2}}} \cdot \frac{2(z - i\frac{\pi}{2})(e^{2z} + 1) + (a+1)(z - i\frac{\pi}{2})^2(e^{2z} + 1) - (z - i\frac{\pi}{2})^2 \cdot 4e^{2z}}{(e^{2z} + 1)^3}$$

$$= e^{i(a+1)\frac{\pi}{2}} \cdot \lim_{w \rightarrow 0} \frac{2w(1 - e^{2w}) + (a+1)w^2(1 - e^{2w}) + 4w^2 e^{2w}}{(1 - e^{2w})^3}$$

keďže $(2w)^3 + \dots \rightarrow 0$ $\lim$ + složené číslo $w = z - i\frac{\pi}{2}$, $z = w + i\frac{\pi}{2}$, $e^{2z} = e^{2w + i\pi} = -e^{2w}$

$$\downarrow = e^{i(a+1)\frac{\pi}{2}} \lim_{w \rightarrow 0} \frac{2w(1 - e^{2w}) + (a+1)w^2(1 - e^{2w}) + 4w^2 e^{2w}}{8w^3}$$

$$= e^{i(a+1)\frac{\pi}{2}} \lim_{w \rightarrow 0} \frac{2(1 - e^{2w}) + (a+1)w(1 - e^{2w}) + 4w e^{2w}}{8w^2} =$$

$$= e^{i(a+1)\frac{\pi}{2}} \lim_{w \rightarrow 0} \frac{2(-2w - \frac{4w^2}{2!} - \frac{8w^3}{3!} - \dots) + (a+1)w(-2w - \frac{4w^2}{2!} - \dots) + 4w(1 + 2w + \frac{4w^2}{2!} + \dots)}{8w^2}$$

rozvoj v mocninu w ,
príslušné prvky násobíme
dalsí jsm vyčíslí rovnice

$$= e^{i(a+1)\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{\left(-\frac{8}{2!} + (a+1)(-2) + 4 \right)}{8} = \frac{e^{i(a+1)\frac{\pi}{2}}(2-2a)}{8}$$

$$= \frac{1-a}{4} e^{i(a+1)\frac{\pi}{2}}$$

Podobne: $\text{res}_{\frac{3\pi}{2}i} g = \lim_{z \rightarrow \frac{3\pi}{2}i} \left((z - \frac{3\pi}{2}i)^2 \frac{e^{(a+1)z}}{(e^{2z} + 1)^2} \right)' =$

$$= \lim_{z \rightarrow \frac{3\pi}{2}i} \frac{(2(z - \frac{3\pi}{2}i) e^{(a+1)z} + (z - \frac{3\pi}{2}i)^2 e^{(a+1)z} \cdot (a+1)) (e^{2z} + 1)^2 - (z - \frac{3\pi}{2}i)^2 e^{(a+1)z} \cdot 2(e^{2z} + 1) \cdot e^{2z} \cdot 2}{(e^{2z} + 1)^4}$$

$$= \lim_{z \rightarrow \frac{3\pi}{2}i} \underbrace{e^{(a+1)z}}_{e^{i(a+1)\frac{3\pi}{2}}} \cdot \frac{2(z - \frac{3\pi}{2}i)(e^{2z} + 1) + (a+1)(z - \frac{3\pi}{2}i)^2(e^{2z} + 1) - (z - \frac{3\pi}{2}i)^2 \cdot 4e^{2z}}{(e^{2z} + 1)^3}$$

$$= e^{\frac{3}{2}\pi i (a+1)} \cdot \lim_{w \rightarrow 0} \frac{e^w (1-e^{2w}) + (a+1) w^2 (1-e^{2w}) + w^2 g e^{2w}}{(1-e^{2w})^3} =$$

$$\left[\text{Limita s\u016bz\u0119r f\u016fr\u0105} \quad w = z - \frac{3}{2}\pi i, \quad z = w + \frac{3}{2}\pi i, \quad e^{2z} = e^{2w + 3\pi i} = -e^{2w} \right]$$

$$= e^{\frac{3}{2}\pi i (a+1)} \cdot \frac{1-a}{4} \quad [\text{sk\u0119m limit\u0105 jako u\u017cy\u015b\u0119}]$$

$$\begin{aligned} \text{Te\u017d} \quad \int_{\Gamma_R} g &= 2\pi i \left(e^{\frac{3}{2}\pi i (a+1)} \cdot \frac{1-a}{4} + e^{\frac{3}{2}\pi i (a+1)} \cdot \frac{1-a}{4} \right) = \frac{(1-a)}{2} \pi i \left(e^{\frac{3}{2}\pi i a} \cdot i + e^{\frac{3}{2}\pi i a} \cdot (-i) \right) \\ &= \frac{1-a}{2} \pi \left(e^{\frac{3}{2}\pi i a} - e^{\frac{3}{2}\pi i a} \right) \end{aligned}$$

$\nwarrow \quad e^{\frac{\pi i}{2}} = i, \quad e^{\frac{3}{2}\pi i} = -i$

$$\text{Te\u017d} \quad \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_R} g = (1-a) \frac{\pi}{2} \left(e^{\frac{3}{2}\pi i a} - e^{\frac{3}{2}\pi i a} \right)$$

Podobnie m\u00f3\u017cmy obliczy\u0107 resztk\u0119 przy jednolitej m\u015bsci:

$$\begin{aligned} \bullet \quad \left| \int_{\Gamma_R} g \right| &\leq \underbrace{(2\pi)}_{\text{d\u0142ugo\u015b\u0107}} \max_{z \in \Gamma_R} |g(z)| = 2\pi \cdot \max_{z \in \Gamma_R} \left| \frac{e^{(a+1)z}}{(e^{2z} + 1)^2} \right| \\ &\leq 2\pi \cdot \frac{e^{(a+1)R}}{(e^{2R} - 1)^2} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

$\nearrow \quad z \in \Gamma_R \Rightarrow \operatorname{Re} z = R, \quad |e^z| = e^{\operatorname{Re} z} + \text{nie\u0142\u0105cznik nier\u00f3wno\u015bci}$

$\nwarrow \quad \text{wy\u015b\u0105tne przybli\u017cenie: } e+1 < 4$

$$\begin{aligned} \bullet \quad \left| \int_{\Gamma_R} g \right| &\leq 2\pi \cdot \max_{z \in \Gamma_R} |g(z)| = 2\pi \cdot \max_{z \in \Gamma_R} \left| \frac{e^{(a+1)z}}{(e^{2z} + 1)^2} \right| \\ &\leq 2\pi \cdot \frac{e^{(a+1)(-R)}}{(1 - e^{-2R})^2} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

$\nearrow \quad \text{jako u\u017cy\u015b\u0119, bierzemy } \operatorname{Re} z = -R$

$\nwarrow \quad \text{ci\u0105\u0142o} \rightarrow 0, \text{ bo } a+1 > 0$
 $\text{f\u0105nkcja} \rightarrow 1$

$$\circ \int_{[-R, R]} g = \int_{-R}^R g \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} I$$

$$\circ \int_{[2\pi i, -2+2\pi i]} g \stackrel{\text{integral přes okraje as +}}{=} - \int_{[-2+2\pi i, 2+2\pi i]} g = - \int_{-R}^R \frac{e^{(a+1)(t+2\pi i)}}{(e^{2(t+2\pi i)} + 1)^2} dt =$$

$$\stackrel{\text{rep } p}{=} - \int_{-R}^R \frac{e^{(a+1)2\pi i} e^{a t}}{(e^{2t} + 1)^2} dt = - e^{2\pi i a} \cdot \int_{-R}^R \frac{e^{(a+1)t}}{(e^{2t} + 1)^2} dt \xrightarrow{R \rightarrow \infty} - e^{2\pi i a} I$$

2πi-periodic

• Průběh výsledek doformuj:

$$(1-a) \frac{D}{2} (e^{\frac{3}{2}\pi i a} - e^{\frac{\pi i a}{2}}) = (1 - e^{\pi i a}) I$$

$$\text{Tag } I = (1-a) \frac{D}{2} \frac{e^{\frac{3}{2}\pi i a} - e^{\frac{\pi i a}{2}}}{1 - e^{\pi i a}} = (1-a) \frac{D}{2} \cdot \frac{\cancel{e^{\pi i a}} (e^{\frac{\pi i a}{2}} - e^{-\frac{\pi i a}{2}})}{\cancel{e^{\pi i a}} (e^{-\pi i a} - e^{\pi i a})} =$$

$2i \sin \frac{\pi a}{2}$
 $-2i \sin \pi a$

$$= (1-a) \frac{D}{2} \cdot \left(- \frac{\sin \frac{\pi a}{2}}{\sin \pi a} \right) = (a-1) \frac{D}{2} \cdot \frac{\sin \frac{\pi}{2}}{2 \sin \frac{D}{2} \cos \frac{D}{2}} =$$

$$= \frac{\pi(a-1)}{4 \cos \frac{D}{2}}$$

Stěpne 1/2 počítat integrály travm

$$\int_0^{\infty} x^a \cdot \frac{P(x)}{Q(x)} dx, \text{ kde } P, Q \text{ jsou polynomy, } a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z},$$

Q nemá zvlášť $\sim [0, +\infty)$,
počet integrál konverguje.