Několik příkladů na aplikaci reziduové věty

(1) $I := \int_0^{\pi} \operatorname{tg}(x+ia)\,dx$, kde $a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$

- Funkce tg je holomorfní na $\mathbb{C} \setminus \{\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\}$. Protože $x+ia \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$, pro $x\in\mathbb{R}$ a $a\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, je integrovaná funkce spojitá na $\mathbb{R}$. Integrál tedy konverguje.

- tg je π-periodická $\Rightarrow$ $I = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \operatorname{tg}(x+ia)\,dx$

Převedeme na křivkový integrál přes jednotkovou kružnici:

$$I = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \operatorname{tg}(x+ia)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{\sin(x+ia)}{\cos(x+ia)}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{\frac{e^{i(x+ia)}-e^{-i(x+ia)}}{2i}}{\frac{e^{i(x+ia)}+e^{-i(x+ia)}}{2}}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} -i\,\frac{e^{ix}e^{-a}-e^{-ix}e^{a}}{e^{ix}e^{-a}+e^{-ix}e^{a}}\cdot\frac{e^{ix}\cdot i}{e^{ix}\cdot i}\,dx = \frac{1}{2}\int_\varphi -i\,\frac{z e^{-a}-\frac{1}{z}\cdot e^{a}}{z e^{-a}+\frac{1}{z}e^{a}}\cdot\frac{1}{zi}\,dz$$

$\varphi(x) = e^{ix},\ x\in[0,2\pi]$; „$e^{ix}=z$, $e^{-ix}=\frac{1}{z}$"

$$= -\frac{1}{2}\int_\varphi \underbrace{\frac{z^2e^{-a}-e^{a}}{z^2e^{-a}+e^{a}}\cdot\frac{1}{z}}_{g(z)}\,dz$$

g je racionální funkce, holomorfní na $\mathbb{C}\setminus$ kořeny jmenovatele

jmenovatel: $q(z) := z(z^2e^{-a}+e^{a})$

kořeny:
- $z=0$, násobnost 1 (z definice)
- $z^2e^{-a}+e^{a}=0$

$z^2e^{-a} = -e^{a}$

$z^2 = -e^{2a}$

$z = \pm i e^{a}$, obě násobnosti 1

Protože kořeny jmenovatele nejsou kořeny čitatele, má g tři póly násobnosti 1, a to $0, ie^{a}, -ie^{a}$

Póly neleží na $\langle\varphi\rangle$, protože $|\pm ie^{a}| = e^{a} \neq 1$ protože $a\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$

[takhle to musí vyjít, pokud původní integrál konverguje]

Použijeme tedy reziduovou větu. ($\Omega=\mathbb{R}$ je hvězdovitá, uzavřená C.V. $M=\{0, ie^a, -ie^a\}$)

Určíme indexy a rezidua:

$$\mathrm{ind}_\varphi 0 = 1 \qquad (0\in U(0,1), \text{ „uvnitř" kružnice})$$

$$|\pm ie^a| = e^a \begin{cases} >1 & \text{pro } a>0 \\ <1 & \text{pro } a<0 \end{cases}$$

Tedy pro $a>0$ je $\mathrm{ind}_\varphi 0 = 1$, $\mathrm{ind}_\varphi \pm ie^a = 0$

Proto

$$\underline{I} = -\frac{1}{2}\cdot 2\pi i \cdot \underbrace{\mathrm{res}_0 g}_{=-1} \qquad \left[\lim_{z\to 0} z\cdot g(z) = \frac{z^2e^{-a}-e^a}{z^2e^{-a}+e^a}\Big|_{z=0} = -1\right]$$

$$= \pi i$$

---

pro $a<0$ je index všech tří bodů roven 1, proto potřebujeme všechna tři rezidua

- $\mathrm{res}_0 g = -1$ stejně jako v případě $a>0$

- $$\mathrm{res}_{ie^a} g = \mathrm{res}_{ie^a} \frac{z^2e^{-a}-e^a}{z^2e^{-a}+e^a}\cdot\frac{1}{z} = \frac{\left(\frac{z^2e^{-a}-e^a}{z}\right)\Big|_{z=ie^a}}{(2ze^{-a})\Big|_{z=ie^a}}$$

Věta IV.4(2). Fce $\frac{z^2e^{-a}-e^a}{z}$ je holomorfní v ie^a

Fce $z^2e^{-a}+e^a$ je v ie^a holomorfní a má tam kořen nás. 1, derivace je $2ze^{-a}$

$$= \frac{\frac{-e^{2a}e^{-a}-e^a}{ie^a}}{2ie^ae^{-a}} = \frac{-e^a-e^a}{-2e^a} = 1$$

- $$\mathrm{res}_{-ie^a} g = \frac{\left(\frac{z^2e^{-a}-e^a}{z}\right)\Big|_{z=-ie^a}}{(2ze^{-a})\Big|_{z=-ie^a}} = \frac{\frac{-e^{2a}e^{-a}-e^a}{-ie^a}}{-2ie^ae^{-a}} = 1$$

Věta IV.4(2) podobně jako výše

podobně jako předchozí případ

Tedy $I = -\frac{1}{2}2\pi i\,(\mathrm{res}_0 g + \mathrm{res}_{ie^a} g + \mathrm{res}_{-ie^a} g) = -\pi i(-1+1+1) = -\pi i$

Závěr $I = \begin{cases} \pi i, & a>0 \\ -\pi i, & a<0 \end{cases}$

Podobnou metodu lze použít pro $\int_0^{2\pi} R(\sin x, \cos x)\,dx$, kde R je racionální funkce dvou proměnných, pokud tato funkce je spojitá na $\mathbb{R}$.

(2) $I := \int_0^{\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1}\,dx$.

- Integrál konverguje (integrand spojitý na $[0,+\infty)$, v $+\infty$ srovnáme s $\frac{1}{x^2}$)
- Integrand je sudá funkce

$$\Rightarrow I = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1}\,dx$$

Uvažme funkci $f(z) = \frac{z^2+1}{z^4+1}$. To je racionální funkce, tedy holomorfní na $\mathbb{C} \setminus$ kořeny jmenovatele. Najděme tyto kořeny:

$$z^4+1=0$$
$$z^4 = -1 = e^{i\pi}$$
$$z = e^{i(\frac{\pi}{4} + k\cdot\frac{2\pi}{4})}, \quad k=0,1,2,3$$

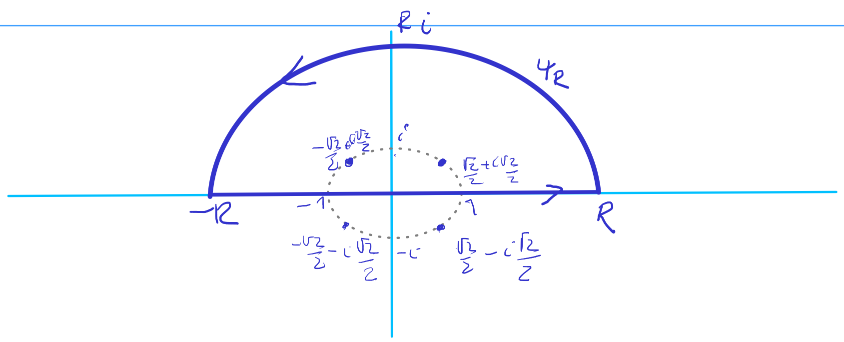
$k=0$: $e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$

$k=1$: $e^{\frac{3}{4}\pi i} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$

$k=2$: $e^{\frac{5}{4}\pi i} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$

$k=3$: $e^{\frac{7}{4}\pi i} = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$

Pro $R>1$ uvažme křivku $\varphi_R = [-R,R] \dotplus \psi_R$, kde $\psi_R(t) = Re^{it}$, $t\in[0,\pi]$



Pak $\forall R>1$: $\int_{\varphi_R} f = 2\pi i\left(\operatorname{res}_{\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}} f + \operatorname{res}_{-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}} f\right)$

[reziduová věta ... $\Omega = \mathbb{C}$ je hvězdovitá, $M = \left\{\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$]

Spočtěme ta rezidua: všechny póly jsou řádu 1

$$\left(\frac{\sqrt2}{2}+i\frac{\sqrt2}{2}\right)^2=i$$

$$\operatorname{res}_{\frac{\sqrt2}{2}+i\frac{\sqrt2}{2}}\frac{z^2+1}{z^4+1}\underset{\text{Věta IV.4 (2)}}{=}\frac{(z^2+1)\big|_{z=\frac{\sqrt2}{2}+i\frac{\sqrt2}{2}}}{4z^3\big|_{z=\frac{\sqrt2}{2}+i\frac{\sqrt2}{2}}}=\frac{\left(\frac{\sqrt2}{2}+\frac{i\sqrt2}{2}\right)^2+1}{4\left(\frac{\sqrt2}{2}+\frac{i\sqrt2}{2}\right)^3}=\frac{i+1}{4i\left(\frac{\sqrt2}{2}+i\frac{\sqrt2}{2}\right)}$$

$$=\frac{(1+i)\left(\frac{\sqrt2}{2}-i\frac{\sqrt2}{2}\right)}{4\cdot i\cdot 1}=\frac{\sqrt2}{4i}=-i\frac{\sqrt2}{4}$$

$$\left(-\frac{\sqrt2}{2}+i\frac{\sqrt2}{2}\right)^2=-i$$

$$\operatorname{res}_{-\frac{\sqrt2}{2}+i\frac{\sqrt2}{2}}\frac{z^2+1}{z^4+1}\underset{\text{Věta IV.4 (2)}}{=}\frac{(z^2+1)\big|_{z=-\frac{\sqrt2}{2}+i\frac{\sqrt2}{2}}}{4z^3\big|_{z=-\frac{\sqrt2}{2}+i\frac{\sqrt2}{2}}}=\frac{\left(\frac{\sqrt2}{2}+\frac{i\sqrt2}{2}\right)^2+1}{4\left(-\frac{\sqrt2}{2}+\frac{i\sqrt2}{2}\right)^3}=\frac{-i+1}{-4i\left(-\frac{\sqrt2}{2}+i\frac{\sqrt2}{2}\right)}$$

$$=\frac{(1-i)\left(-\frac{\sqrt2}{2}-i\frac{\sqrt2}{2}\right)}{-4\cdot i\cdot 1}=\frac{\sqrt2}{4i}=-i\frac{\sqrt2}{4}$$

Tedy $\forall R>1:\ \int_{\varphi_R} f=2\pi i\left(-\frac{i\sqrt2}{4}-\frac{i\sqrt2}{4}\right)=\pi\sqrt2$

Odtud

$$\pi\sqrt2=\lim_{R\to\infty}\int_{\varphi_R} f=\lim_{R\to\infty}\left(\int_{[-R,R]} f+\int_{\varphi_R} f\right)$$

Přitom $\int_{[-R,R]} f \underset{\text{parametrizace } t\mapsto t,\ t\in[-R,R]}{=} \int_{-R}^{R} f(x)\,dx \xrightarrow{R\to\infty} 2I$

$$\left|\int_{\varphi_R} f\right|\le \underbrace{V(\varphi_R)}_{=\pi R}\cdot\underbrace{\max_{z\in\langle\varphi_R\rangle}|f(z)|}_{\le\frac{R^2+1}{R^4-1}}\le\frac{\pi R\cdot(R^2+1)}{R^4-1}\xrightarrow{R\to\infty}0$$

$$\left[\,z\in\langle\varphi_R\rangle\Rightarrow|z|=R\Rightarrow|f(z)|=\left|\frac{z^2+1}{z^4+1}\right|\le\frac{|z|^2+1}{|z|^4-1}=\frac{R^2+1}{R^4-1}\,\right]$$

Závěr: $\pi\sqrt2=2I$, tedy $I=\frac{\pi\sqrt2}{2}$

Stejné metody fungují pro $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\, dx$, kde

P, Q jsou polynomy, Q nemá reálné kořeny

a stupeň Q ≥ stupeň P + 2 (tj. integrál konverguje)

③ $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{\frac{x^3-x}{(x^2+1)(x^2+x)}}_{f(x)} \sin \pi x \, dx$

• Integrál konverguje:
  ∘ f spojitá na $\mathbb{R}\setminus\{0,-1\}$
  ∘ v bodech 0 a −1 má vlastní limitu
    [buď reálnými metodami,
    nebo komplexní pohled – f je holomorfní na $\mathbb{C}\setminus\{0,-1\}$
    a v bodech 0, −1 má odstranitelnou singularitu,
    protože jmenovatel tam má kořen násobnosti 1
    a $\sin \pi x$ tam má kořen]
  ∘ u $\pm\infty$ lze použít Dirichletovo kritérium z reálné analýzy
    [$\sin \pi x$ má omezenou primitivní funkci na $\mathbb{R}$
    $\frac{x^3-x}{(x^2+1)(x^2+x)} \xrightarrow{x\to\pm\infty} 0$
    a je monotónní na nějakém okolí $+\infty$
    i na nějakém okolí $-\infty$, jako každá racionální funkce]

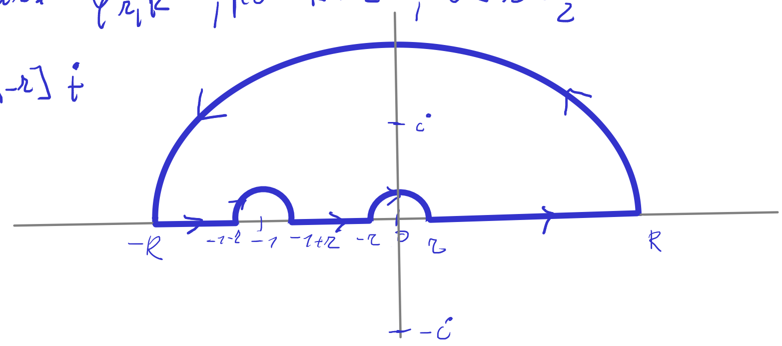
• Uvažme funkci $g(z) := \frac{z^3-z}{(z^2+1)(z^2+z)} e^{i\pi z}$.

Pak g je holomorfní na $\mathbb{C}\setminus\{0,-1,i,-i\}$, ve vyjmenovaných bodech má póly násobnosti 1.

• Uvažme následující křivku $\varphi_{r,R}$, pro $R>2$, $0<r<\frac{1}{2}$.

$$\varphi_{R,r} := [-R,-1-r] \dotplus (\dot{-}\eta_{-1,r}) \dotplus [-1+r,-r] \dotplus (\dot{-}\eta_{0,r}) \dotplus [r,R] \dotplus \eta_{0,R}$$

kde $\eta_{a,s}(t) = a + s e^{it}$, $t \in [0,\pi]$



Z reziduové věty ($\Omega = \mathbb{C}$ hvězdovitá, $M = \{-1, 0, i, -i\}$) plyne

$$\int_{\varphi_{R,r}} g = 2\pi i \cdot \operatorname{res}_i g$$

$$= 2\pi i \cdot \frac{1}{2} e^{-\pi}(1+i) = \pi e^{-\pi}(-1+i)$$

Přičemž $\operatorname{res}_i g \overset{\text{Věta IV.4(2)}}{=} \dfrac{\frac{z^3-z}{z^2+z} e^{i\pi z}\Big|_{z=i}}{2z\,|_{z=i}} = \dfrac{\frac{-i-i}{-1+i} e^{-\pi}}{2i} = \dfrac{-e^{-\pi}}{-1+i} = -\dfrac{e^{-\pi}}{2}(-1-i) = \frac{1}{2} e^{-\pi}(1+i)$

Tedy $\lim\limits_{R\to\infty} \lim\limits_{r\to 0+} \int_{\varphi_{R,r}} g = \pi e^{-\pi}(-1+i)$

- Podívejme se na limity integrálů přes jednotlivé části cesty $\varphi_{R,r}$:
  - $\int_{\eta_{0,R}} g \xrightarrow{R\to+\infty} 0$ dle Jordanova lemmatu IV.6

    [$\alpha = 0, \beta = \pi$; fce $z \mapsto \dfrac{z^3-z}{z^2+z}$ je spojitá na $\mathbb{C} \setminus \overline{U(0,1)}$ a má ∞ limitu 0; $x = \pi > 0$]

  - $\lim\limits_{r\to 0+} \int_{\eta_{0,r}} g = \pi i \cdot \operatorname{res}_0 g \overset{\text{Věta IV.4(2)}}{=} \pi i \cdot \dfrac{\frac{z^3-z}{(z^2+1)(z+1)} e^{i\pi z}\Big|_{z=0}}{1\,|_{z=0}} = 0$

    Lemma IV.7, g má v 0 pól n.s. 1, v -1 též
  - $\lim\limits_{r\to 0+} \int_{\eta_{-1,r}} g = \pi i \cdot \operatorname{res}_{-1} g \overset{\text{Věta IV.4(2)}}{=} \pi i \cdot \dfrac{\frac{z^3-z}{(z^2+1)z} e^{i\pi z}\Big|_{z=-1}}{1\,|_{z=-1}} = \dfrac{\frac{-1-1}{2\cdot(-1)} \overbrace{e^{-i\pi}}^{=-1}}{1} = -\pi i$

Tedy: $\frac{1}{2} e^{-\pi}(-1+i) = \lim\limits_{R\to+\infty} \lim\limits_{r\to 0+} \left(\int_{[-R,-1-r]} g + \int_{[-1+r,-r]} g + \int_{[r,R]} g \right) - (-\pi i)$

$\Rightarrow \frac{1}{2} e^{-\pi}(-1+i) - \pi i = \lim\limits_{R\to+\infty} \lim\limits_{r\to 0+} \left(\int_{[-R,-1-r]} g + \int_{[-1+r,-r]} g + \int_{[r,R]} g \right) =$

$$= \lim_{R\to+\infty} \lim_{r\to 0+} \left(\int_{-R}^{-1-r} g + \int_{-1+r}^{-r} g + \int_{r}^{R} g \right)$$

Všimněme si, že pro $x \in \mathbb{R}$ je $f(x) = \operatorname{Im} g(x)$

Proto platí:

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} f = \lim_{R\to+\infty} \lim_{r\to 0+} \left(\int_{-R}^{-1-r} f + \int_{-1+r}^{-r} f + \int_{r}^{R} f \right) = \lim_{R\to+\infty} \lim_{r\to 0+} \operatorname{Im}\left(\int_{-R}^{-1-r} g + \int_{-1+r}^{-r} g + \int_{r}^{R} g \right)$$

$$= \operatorname{Im} \lim_{R\to+\infty} \lim_{r\to 0+} \left(\int_{-R}^{-1-r} g + \int_{-1+r}^{-r} g + \int_{r}^{R} g \right) = \operatorname{Im}\left(\frac{1}{2} e^{-\pi}(-1+i) - \pi i \right) =$$

$$= \frac{1}{2} e^{-\pi} - \pi$$

Podobná metoda funguje pro výpočet

- $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \sin ax \, dx$, kde $a > 0$, P, Q jsou polynomy s reálnými koeficienty, stupeň $P <$ stupeň Q, reálné kořeny Q (pokud nějaké jsou), jsou násobnosti 1 a jsou to zároveň kořeny $\sin ax$ (tj. násobky $\frac{\pi}{a}$).
- $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \cos ax$, kde $a > 0$, P, Q jsou polynomy s reálnými koeficienty, stupeň $P <$ stupeň Q, reálné kořeny Q (pokud nějaké jsou), jsou násobnosti 1 a jsou to zároveň kořeny $\cos ax$ ($\text{tj. } \frac{1}{a}(\frac{\pi}{2} + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$)

  [Postupujeme stejně, nakonec uvážíme reálnou část]
- $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} e^{iax}$, kde $a > 0$, P, Q jsou polynomy, stupeň $P <$ stupeň Q, Q nemá reálné kořeny