Sčítání řad pomocí reziduové věty

$\boxed{1}$ Vlastnosti funkcí $u(z) = \pi \cot g\, \pi z$ a $v(z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}$

(a) u i v jsou holomorfní na $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$

[$u(z) = \frac{\pi \cos \pi z}{\sin \pi z}$, $v = \frac{\pi}{\sin \pi z}$ ... čitatel i jmenovatel jsou celé funkce

$\sin \pi z = 0 \iff z \in \mathbb{Z}$]

(b) Nechť $k \in \mathbb{Z}$. Pak u i v mají k pól násobnosti 1
a platí $\operatorname{res}_k u = 1$, $\operatorname{res}_k v = -1$

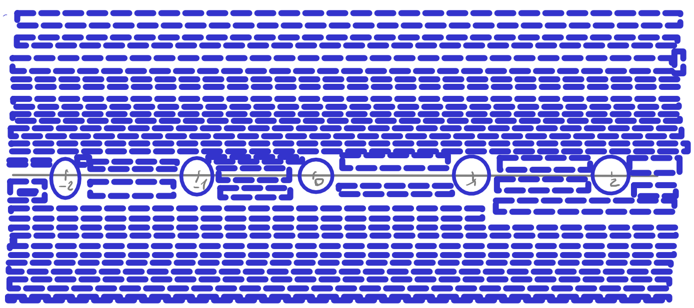
[Plyne z věty IV.4 (2): $\sin \pi k = 0$

$(\sin \pi z)'|_{z=k} = \pi \cos \pi z|_{z=k} = \pi \cdot (-1)^k \neq 0$

Tedy $\operatorname{res}_k u = \frac{\pi \cos \pi z|_{z=k}}{(\sin \pi z)'|_{z=k}} = \frac{\pi \cos k\pi}{\pi \cos k\pi} = 1$

$\operatorname{res}_k v = \frac{\pi|_{z=k}}{(\sin \pi z)'|_{z=k}} = \frac{\pi}{\pi \cos k\pi} = (-1)^k$]

(c) $\forall r \in (0, \frac{1}{2})$: u i v jsou omezené na $\mathbb{C} \setminus \bigcup\{U(k,r),\ k \in \mathbb{Z}\}$



Protože u i v jsou 1-periodické, stačí omezenost dokázat
na množině $\{z \in \mathbb{C};\ \operatorname{Re} z \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}];\ |z| \geq r\} =: M_r$

Počítejme:

$$|u(z)| = |\pi \cot g\, \pi z| = \left|\frac{\pi \cos \pi z}{\sin \pi z}\right| = \pi \cdot \left|\frac{e^{i\pi z}+e^{-i\pi z}}{e^{i\pi z}-e^{-i\pi z}}\right| =$$

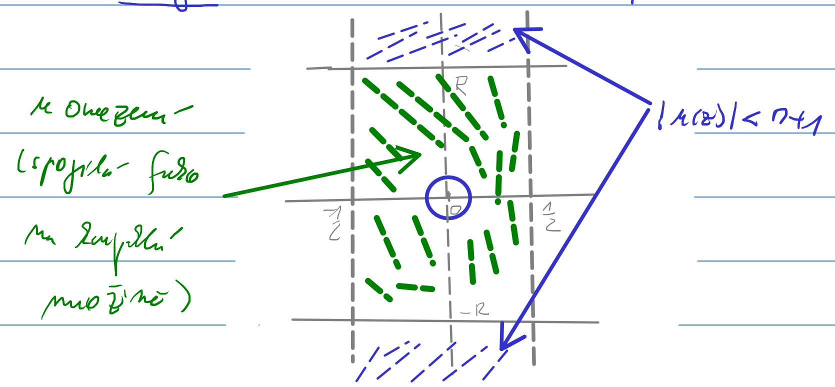
$$\overset{z=x+iy}{=} \pi \cdot \left|\frac{e^{-\pi y+i\pi x}+e^{\pi y-i\pi x}}{e^{-\pi y+i\pi x}-e^{\pi y-i\pi x}}\right| \leq \pi \cdot \frac{e^{-\pi y}+e^{\pi y}}{|e^{-\pi y}-e^{\pi y}|}$$

Pro $y>0$:

$$\leq \pi \cdot \frac{e^{-\pi y}+e^{\pi y}}{e^{\pi y}-e^{-\pi y}} = \pi \cdot \frac{e^{-2\pi y}+1}{1-e^{-2\pi y}} \xrightarrow{y\to+\infty} \pi$$

Podobně pro $y<0$ ... $\leq \pi \dfrac{e^{-\pi y}+e^{\pi y}}{e^{-\pi y}-e^{\pi y}} = \pi \dfrac{1+e^{2\pi y}}{1-e^{2\pi y}} \xrightarrow{y\to-\infty} \pi$

Tedy: $\exists\ R>0$: $|\operatorname{Im} z| > R \Rightarrow |u(z)| < \pi+1$



Množina $\{z \in \mathbb{C};\ -\frac{1}{2} \leq \operatorname{Re} z \leq \frac{1}{2},\ |\operatorname{Im} z| \leq R,\ |z| \geq r\}$ je omezená a uzavřená, tedy kompaktní, proto je na ní u omezená.

Omezenost v se dokáže podobně:

$$|v(z)| = \left|\frac{\pi}{\sin \pi z}\right| = \left|\frac{2\pi i}{e^{i\pi z}-e^{-i\pi z}}\right| = \frac{2\pi}{|e^{-\pi y+i\pi x}-e^{\pi y-i\pi x}|} \leq \frac{2\pi}{|e^{-\pi y}-e^{\pi y}|} \xrightarrow[y\to\pm\infty]{} 0$$

Tedy $\exists R>0\ \forall z,\ |\operatorname{Im} z| > R \Rightarrow |v(z)| < 1$

(d) Speciálně u, v jsou omezené na $\bigcup_{k=0}^{\infty} \{z \in \mathbb{C};\ |z| = \frac{1}{2}+k\}$

$\boxed{2}$ Součet řad $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6+1}$

(a) Jde o řadu s kladnými členy, která konverguje (srovnáme s $\frac{1}{n^6}$)

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6+1} = \frac{1}{2}\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{n^6+1} - 1\right)$

(c) Položme $g(z) = \frac{1}{z^6+1}$, $f(z) = \frac{1}{z^6+1}\,\frac{\pi}{\operatorname{cotg} \pi z}$

Pak • g holomorfní na $\mathbb{C} \setminus \{e^{i\pi/6}, e^{i\pi/2}, e^{\frac{5}{6}\pi i}, e^{\frac{7}{6}\pi i}, e^{\frac{3}{2}\pi i}, e^{\frac{11}{6}\pi i}\}$

kořeny $z^6=-1$, $M_{\frac{1}{6}}(-1)$

ve vyjmutých bodech má g póly násobnosti 1

• f holomorfní na $\mathbb{C} \setminus (\mathbb{Z} \cup M_{1/6}(-1))$, ve vyjmutých bodech má f póly násobnosti 1

• $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow \operatorname{res}_k f = \left(\frac{1}{z^6+1}\right)\Big|_{z=k} \cdot \underbrace{\operatorname{res}_k \frac{\pi}{\operatorname{cotg} \pi z}}_{=1} = \frac{1}{k^6+1}$

Věta IV.4(3)

• $a \in M_{1/6}(-1)$

$$\Rightarrow \operatorname{res}_a f = \frac{\pi \operatorname{cotg} \pi z \,\big|_{z=a}}{6z^5 \,\big|_{z=a}} = \frac{\pi \operatorname{cotg} \pi a}{6a^5} =$$

Věta IV.4(2)

$$= -\frac{\pi}{6}\, a \cdot \operatorname{cotg} \pi a \qquad \left[\text{protože } a^6 = -1\right]$$

Probereme jednotlivé hodnoty a:

$$a = e^{i\pi/6} \Rightarrow \operatorname{res}_a f = -\frac{\pi}{6} e^{i\pi/6} \operatorname{cotg}\left(\pi e^{i\pi/6}\right) =$$

$$= -\frac{\pi}{6} e^{i\pi/6} \frac{e^{i\pi e^{i\pi/6}} + e^{-i\pi e^{i\pi/6}}}{e^{i\pi e^{i\pi/6}} - e^{-i\pi e^{i\pi/6}}} \cdot i$$

$$= -\frac{\pi}{6} e^{i\pi/6} \frac{e^{-\pi \sin \pi/6 + i\pi \cos \pi/6} + e^{\pi \sin \pi/6 - i\pi \cos \pi/6}}{e^{-\pi \sin \pi/6 + i\pi \cos \pi/6} - e^{\pi \sin \pi/6 - i\pi \cos \pi/6}} \cdot i$$

$\left[\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \quad \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$

$$= -\frac{\pi}{6}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) \frac{e^{-\pi + i\pi\sqrt{3}} + 1}{e^{-\pi + i\pi\sqrt{3}} - 1} \cdot i$$

rozná-sobení i

+ rozšíření zlomku

$$= -\frac{\pi}{6}\left(-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)\frac{\left(e^{-\pi+i\pi\sqrt{3}}+1\right)\left(e^{-\pi-i\pi\sqrt{3}}-1\right)}{\left(e^{-\pi+i\pi\sqrt{3}}-1\right)\left(e^{-\pi-i\pi\sqrt{3}}-1\right)}$$

$$= -\frac{\pi}{6}\left(-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)\frac{e^{-2\pi}+\overbrace{e^{-\pi-i\pi\sqrt{3}}-e^{-\pi+i\pi\sqrt{3}}}^{\cdot\, e^{-\pi}\cdot 2i\sin(\pi\sqrt{3})}-1}{e^{-2\pi}\underbrace{-e^{-\pi-i\pi\sqrt{3}}-e^{-\pi-i\pi\sqrt{3}}}_{-2e^{-\pi}\cos(\pi\sqrt{3})}+1}$$

$$= -\frac{\pi}{6}\left(-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)\frac{e^{-2\pi}-1-2ie^{-\pi}\sin(\pi\sqrt{3})}{e^{-2\pi}-2e^{-\pi}\cos(\pi\sqrt{3})+1}$$

$$= -\frac{\pi}{6}\,\frac{-\frac{1}{2}(e^{-2\pi}-1)+\sqrt{3}e^{-\pi}\sin(\pi\sqrt{3})+i\left(\frac{e^{-2\pi}-1}{2}\sqrt{3}+e^{-\pi}\sin(\pi\sqrt{3})\right)}{e^{-2\pi}-2e^{-\pi}\cos(\pi\sqrt{3})+1}$$

$a = e^{i\pi/2} = i$

$$\operatorname{res}_a f = -\frac{\pi}{6}\, i \cot(\sqrt{3}i) = -\frac{\pi}{6}\, i\,\frac{e^{-\pi}+e^{\pi}}{e^{-\pi}-e^{\pi}}\cdot i = \frac{\pi}{6}\,\frac{e^{-2\pi}+1}{e^{-2\pi}-1}$$

$a = e^{\frac{5}{6}\pi i}$ $\quad \operatorname{res}_a f = \frac{-\pi}{6}\, e^{\frac{5}{6}\pi i}\cot\frac{5}{6}\pi i =$

[podobně jako výše … $\cos\frac{5}{6}\pi = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin\frac{5}{6}\pi = \frac{1}{2}$] $= -\frac{\pi}{6}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right)\dfrac{e^{-\pi-i\pi\sqrt{3}}+1}{e^{-\pi-i\pi\sqrt{3}}-1}\cdot i$

$$= -\frac{\pi}{6}\left(-\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)\cdot\frac{\left(e^{-\pi-i\pi\sqrt{3}}+1\right)\left(e^{-\pi+i\pi\sqrt{3}}-1\right)}{\left(e^{-\pi-i\pi\sqrt{3}}-1\right)\left(e^{-\pi+i\pi\sqrt{3}}-1\right)} =$$

$$= -\frac{\pi}{6}\left(\frac{-1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)\frac{e^{-2\pi}-1+2ie^{-\pi}\sin\pi\sqrt{3}}{e^{-2\pi}-2e^{-\pi}\cos\pi\sqrt{3}+1}$$

$$= -\frac{\pi}{6}\,\frac{-\frac{1}{2}(e^{-2\pi}-1)+e^{-\pi}\sqrt{3}\sin\pi\sqrt{3}+i\left(-\frac{e^{-2\pi}-1}{2}\sqrt{3}-e^{-\pi}\sin\pi\sqrt{3}\right)}{e^{-2\pi}-2e^{-\pi}\cos\pi\sqrt{3}+1}$$

$a = e^{i\frac{7}{6}\pi} = -e^{i\pi/6} \Rightarrow \operatorname{res}_a f = \operatorname{res}_{e^{i\pi/6}} f$

$a = -i \Rightarrow \operatorname{res}_a f = \operatorname{res}_i f$

$a = e^{i\cdot\frac{11}{6}\pi} = -e^{i\frac{5}{6}\pi} \Rightarrow \operatorname{res}_a f = \operatorname{res}_{e^{i\frac{5}{6}\pi}} f$

(a) pro $n \in \mathbb{N}$ položme $\varphi_n(t) = (n+\frac{1}{2}) e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$

Pak $\forall n \in \mathbb{N}$: $$\int_{\varphi_n} f = 2\pi i \left(\sum_{a \in M_{1/6}(-1)} \operatorname{res}_a f + \sum_{k=-n}^{n} \operatorname{res}_k f \right)$$

$\uparrow$ reziduová věta

⌈ buď $\Omega = \mathbb{C}$, $M = \mathbb{Z} \cup M_{1/6}(-1)$ ... izolovaná

a použijeme Věta V.3

nebo $\Omega = U(0, n+1)$, $M = M_{1/6} \cup \{-n, -n+1, \dots, n\}$ ⌋

$$= 2\pi i \left(4 \cdot \left(-\frac{\pi}{6} \cdot \frac{-\frac{1}{2}(e^{-2\pi}-1) + \sqrt{3} e^{-\pi} \sin(\pi\sqrt{3})}{e^{-2\pi} - 2e^{-\pi}\cos(\pi\sqrt{3}) + 1} \right) + 2 \cdot \frac{\pi}{6} \cdot \frac{e^{-2\pi}+1}{e^{-2\pi}-1} + \sum_{k=-n}^{n} \frac{1}{k^6+1} \right) =$$

$$= 2\pi i \left(\frac{\pi}{3} \left(\frac{e^{-2\pi}+1}{e^{-2\pi}-1} - \frac{-(e^{-2\pi}-1) + 2\sqrt{3} e^{-\pi} \sin \pi\sqrt{3}}{e^{-2\pi} - 2e^{-\pi}\cos(\pi\sqrt{3}) + 1} \right) + \sum_{k=-n}^{n} \frac{1}{k^6+1} \right)$$

(b) $\int_{\varphi_n} f \xrightarrow{n \to \infty} 0$

⌈ $$\left| \int_{\varphi_n} f \right| = \left| \int_{\varphi_n} \pi \operatorname{cotg} \pi z \, \frac{1}{z^6+1} \, dz \right| \le \overbrace{\underbrace{2\pi(n+\tfrac{1}{2})}_{V(\varphi_n)} \cdot M \cdot \frac{1}{(n+\frac{1}{2})^6 - 1}}^{\to 0}$$

$\uparrow$ konstanta omezující $\pi \operatorname{cotg} \pi z$ na $\bigcup_n \langle \varphi_n \rangle$ (viz $\boxed{1}$ d) ⌋

Tedy: $$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{k^6+1} = \frac{\pi}{3} \left(\frac{1+e^{-2\pi}}{1-e^{-2\pi}} + \frac{1 - e^{-2\pi} + 2\sqrt{3} e^{-\pi} \sin \pi\sqrt{3}}{e^{-2\pi} - 2e^{-\pi} \cos \pi\sqrt{3} + 1} \right)$$

Závěr: $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^6+1} = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{3} \left(\frac{1+e^{-2\pi}}{1-e^{-2\pi}} + \frac{1 - e^{-2\pi} + 2\sqrt{3} e^{-\pi} \sin \pi\sqrt{3}}{e^{-2\pi} - 2e^{-\pi} \cos \pi\sqrt{3} + 1} \right) - 1 \right)$$

$\boxed{3}$ Podobně lze počítat součty řad $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{P(n)}{Q(n)}$, $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n \frac{P(n)}{Q(n)}$,

kde P, Q jsou polynomy, stupeň $Q \geq 2 +$ stupeň P, Q nemá kořeny v $\mathbb{Z}$

Pro případ střídání znamének použijeme fci $\frac{\pi}{\sin \pi z}$

$\boxed{4}$ Další aplikace – pokud Q má nějaké kořeny v $\mathbb{Z}$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^4}$$

(a) řada konverguje (absolutně)

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^4} = \frac{1}{2} \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^4}$

(c) $g(z) = \frac{1}{z^4}$, $f(z) = \frac{1}{z^4} \cdot \frac{\pi}{\sin \pi z}$

g holomorfní na $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, f holomorfní na $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$

V bodech $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$ má f pól násobnosti 1, v 0 má pól násobnosti 5

Pro $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ je $\operatorname{res}_k f \underset{\text{Věta IV.4(3)}}{=} \left(\frac{1}{z^4}\right)\Big|_{z=k} \cdot \operatorname{res}_k \frac{\pi}{\sin \pi z} = \frac{1}{k^4} \cdot (-1)^k$

(d) $\operatorname{res}_0 f = \frac{1}{24} \cdot \lim_{z \to 0} \left(\frac{\pi z}{\sin \pi z}\right)^{(4)}$

Buď můžem 4x zderivovat, nebo použít Taylorův rozvoj

Víme, že $\frac{\pi z}{\sin \pi z}$ má v 0 odstranitelnou singularitu, tedy na $U(0,1)$
[kde je po dodefinování holomorfní] lze vyjádřit mocninnou řadou

$\frac{\pi z}{\sin \pi z} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $z \in U(0,1)$ Navíc je to sudá funkce, a proto koeficienty u lichých mocnin jsou 0

Máme teď $\pi z = \sin \pi z \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} z^{2n}\right) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (\pi z)^{2k+1}}{(2k+1)!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} z^{2n}\right)$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Cauchyův součin řad}}}{=} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{m} \frac{(-1)^k \pi^{2k+1}}{(2k+1)!} a_{2(m-k)} \right) z^{2m+1}$$

Jednoznačnost rozvoje: u z^1: $\pi = \pi a_0 \Rightarrow a_0 = 1$

u z^3: $0 = \pi a_2 - \frac{\pi^3}{6} a_0 \Rightarrow a_2 = \frac{\pi^2}{6}$

u z^5: $0 = \pi a_4 - \frac{\pi^3}{6} a_2 + \frac{\pi^5}{120} a_0$

$$a_4 = \frac{\pi^2}{6} a_2 - \frac{\pi^4}{120} a_0 = \frac{\pi^4}{36} - \frac{\pi^4}{120} = \frac{7}{360}\pi^4$$

Toto a_4 je hledané reziduum.

(e) $\varphi_n(t) = (n+\frac{1}{2}) e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$

$\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\int_{\varphi_n} f = 2\pi i \sum_{k=-n}^{n} \operatorname{res}_k f = 2\pi i \left(\underset{\substack{\operatorname{res}_0 f \\ \downarrow}}{\frac{7}{360}\pi^4} + \sum_{\substack{k=-n \\ k \neq 0}}^{n} \frac{1}{k^4} \right) =$$

$$= 2\pi i \left(\frac{7}{360}\pi^4 + 2 \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^4} \right)$$

$$\int_{\varphi_n} f \xrightarrow{n \to \infty} 0 \qquad \left| \int_{\varphi_n} f \right| \leq \underbrace{2\pi (n+\tfrac{1}{2})}_{V(\varphi_n)} \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ \text{konstanta omezení} \\ \frac{\pi}{\sin \pi z} \text{ na } \bigcup_n \langle \varphi_n \rangle}}{M} \cdot \frac{1}{(n+\frac{1}{2})^4} \longrightarrow 0$$

Odtud $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} = -\frac{7}{720}$

$\boxed{\text{Touto metodou}}$ lze sečíst řady $\sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ Q(n) \neq 0}} \frac{P(n)}{Q(n)}$, $\sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ Q(n) \neq 0}} (-1)^n \frac{P(n)}{Q(n)}$

P, Q polynomy, stupeň Q $\geq$ 2 + stupeň P