Appendix A3: **Souvislé metrické prostory**

Definice. Nechť (M, d) je metrický prostor.

- Říkáme, že M je **souvislý**, pokud M a $\emptyset$ jsou jediné dvě podmnožiny M, které jsou zároveň otevřené i uzavřené.
- Říkáme, že podmnožina $A \subset M$ je **souvislá**, pokud je souvislý metrický prostor (A, d).

Příklady. *Každý interval v $\mathbb{R}$ je souvislý. Obecněji, každá konvexní podmnožina $\mathbb{R}^n$ je souvislá.*

Zachovávání souvislosti.

1. *Nechť M, N jsou metrické prostory. Předpokládejme, že M je souvislý a existuje spojité zobrazení $f : M \xrightarrow{na} N$. Pak N je také souvislý.*
2. *Nechť M je metrický prostor a $A \subset M$ je souvislá podmnožina. Pak $\overline{A}$ je také souvislá podmnožina.*
3. *Nechť M je metrický prostor a $A, B \subset M$ jsou dvě souvislé podmnožiny. Pokud $A \cap B \neq \emptyset$, pak $A \cup B$ je souvislá.*
4. *Nechť M je metrický prostor a $\mathcal{A}$ je nějaký systém souvislých podmnožin M. Pokud existuje taková $A \in \mathcal{A}$, že pro každou $B \in \mathcal{A}$ je $A \cap B \neq \emptyset$, pak $\bigcup \mathcal{A}$ je souvislá množina.*

Komponenty metrického prostoru. *Nechť (M, d) je metrický prostor a $x \in M$. Nechť A je sjednocení všech souvislých podmnožin prostoru M, které obsahují bod x. Pak platí:*

- *$x \in A$, speciálně $A \neq \emptyset$.*
- *A je souvislá podmnožina M.*
- *A je největší souvislá podmnožina M obsahující bod x.*
- *A je uzavřená podmnožina M.*

Množině A říkáme **komponenta prostoru** *M* **obsahující bod** *x.*

- *Jsou-li $x, y \in M$, pak komponenty obsahující body x, y jsou buď stejné nebo disjunktní.*

Definice. Metrický prostor se nazývá **lokálně souvislý**, pokud má bázi otevřených množin tvořenou souvislými množinami.

Příklady.

1. *Prostor $\mathbb{R}^n$ je souvislý i lokálně souvislý. Obecněji, každá konvexní podmnožina $\mathbb{R}^n$ je souvislá i lokálně souvislá.*
2. *Každá otevřená podmnožina $\mathbb{R}^n$ je lokálně souvislá (a může být nesouvislá).*
3. *Uzavřená podmnožina $\mathbb{R}^n$ nemusí být lokálně souvislá. Jednoduchým příkladem je $\{0\} \cup \{\frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$, jiným příkladem je Cantorovo diskontinuum.*
4. *Ani souvislá uzavřená podmnožina $\mathbb{R}^n$ nemusí být lokálně souvislá (pokud $n \geq 2$). Příkladem je sjednocení úseček $[(0,0),(0,1)] \cup \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [(\frac{1}{n}, 0), (0,1)] \subset \mathbb{R}^2$.*

Lokální souvislost a komponenty.

1. *Je-li M lokálně souvislý metrický prostor, pak každá jeho komponenta je otevřená v M.*
2. *Speciálně, je-li M otevřená podmnožina $\mathbb{R}^n$, pak každá komponenta M je otevřená v R^n.*
3. *Není-li M lokálně souvislý, pak mohou existovat komponenty, které nejsou otevřené. Viz výše uvedené příklady (bod (3)).*