Appendix A2: Něco málo z teorie míry a integrálu

A2.1 Nezáporná míra, abstraktní Lebesgueův integrál

Nechť Ω je nějaká množina a Σ je nějaký systém podmnožin Ω. Σ je σ-**algebra**, pokud platí

(a) $\emptyset \in \Sigma$;
(b) $A \in \Sigma \Rightarrow \Omega \setminus A \in \Sigma$;
(c) je-li (A_n) posloupnost prvků Σ, pak $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \Sigma$.

Nechť Ω je nějaká množina a Σ nějaká σ-algebra podmnožin Σ. Pak dvojici (Ω, Σ) říkáme **měřitelný prostor**. **Mírou** na (Ω, Σ) rozumíme každou funkci $\mu : \Sigma \to [0, \infty]$ splňující podmínky:

(a) $\mu(\emptyset) = 0$;
(b) je-li (A_n) posloupnost po dvou disjunktních prvků Σ, pak $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$.

Míra μ se nazývá

- **konečná**, pokud $\mu(\Omega) < \infty$;
- σ-**konečná**, pokud existuje posloupnost (A_n) prvků Σ taková, že $\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ a $\mu(A_n) < \infty$ pro každé n;
- **úplná**, pokud pro každou $A \in \Sigma$ splňující $\mu(A) = 0$ je každá její podmnožina měřitelná (tj. patří do Σ).

Není-li μ úplná, dá se zúplnit. Její zúplnění je míra $\widetilde{\mu}$ definovaná na σ-algebře $\widetilde{\Sigma}$, kde

$$\widetilde{\Sigma} = \{A \subset \Omega; \exists B, C \in \Sigma : B \subset A \subset C \ \&\ \mu(C \setminus B) = 0\}$$

a $\widetilde{\mu}(A) = \mu(B) (= \mu(C))$, kde B, C jsou jako výše.

Funkce $f : \Omega \to \mathcal{F}$ se nazývá

- **měřitelná**, pokud $f^{-1}(U) \in \Sigma$ pro každou U otevřenou;
- **jednoduchá**, nabývá-li jen konečně mnoha hodnot;
- μ-**měřitelná**, pokud $f^{-1}(U) \in \widetilde{\Sigma}$ pro každou U otevřenou.

Nechť $f : \Omega \to \mathcal{F}$ je měřitelná. Její integrál podle μ se definuje postupně takto:

- Je-li f jednoduchá a nezáporná, pak f lze napsat ve tvaru $f = \sum_{j=1}^{n} c_j \chi_{A_j}$, kde $c_j \geq 0$ a $A_j \in \Sigma$ jsou po dvou disjunktní množiny. Pak definujeme
$$\int_{\Omega} f \, \mathrm{d}\mu = \sum_{j=1}^{n} c_j \mu(A_j),$$
přičemž používáme konvenci $0 \cdot (+\infty) = 0$.
- Je-li f nezáporná, definujeme
$$\int_{\Omega} f \, \mathrm{d}\mu = \sup\{\int_{\Omega} s \, \mathrm{d}\mu; 0 \leq s \leq f, s \text{ jednoduchá měřitelná}\}.$$
Hodnota tohoto integrálu může být cokoli z intervalu $[0, \infty]$.
- Je-li f reálná, definujeme
$$\int_{\Omega} f \, \mathrm{d}\mu = \int_{\Omega} f^{+} \, \mathrm{d}\mu - \int_{\Omega} f^{-} \, \mathrm{d}\mu,$$
pokud rozdíl má smysl. Hodnota může být cokoli z intervalu $[-\infty, \infty]$, smysl nemá rozdíl $\infty - \infty$. Pokud integrál existuje a jeho hodnota je reálné číslo, f se nazývá **integrovatelná**.
- Je-li f komplexní, definujeme
$$\int_{\Omega} f \, \mathrm{d}\mu = \int_{\Omega} \operatorname{Re} f \, \mathrm{d}\mu + i \int_{\Omega} \operatorname{Im} f \, \mathrm{d}\mu,$$
pokud oba integrály vpravo jsou konečné.

Poznámka: Je-li f μ-měřitelná, pak integrálem $\int_\Omega f\,\mathrm{d}\mu$ rozumíme integrál $\int_\Omega f\,\mathrm{d}\widetilde{\mu}$. Pro takovou f také existuje měřitelná g, která je rovna f $\widetilde{\mu}$-skoro všude.

A2.2 Záměna limity a integrálu

Zachovávání měřitelnosti. *Nechť (Ω, Σ, μ) je prostor s mírou a nechť (f_n) je posloupnost měřitelných funkcí na Ω.*

- *Jestliže posloupnost (f_n) bodově konverguje k nějaké funkci f, pak je funkce f měřitelná.*
- *Jestliže posloupnost (f_n) konverguje* **skoro všude** *k nějaké funkci f (tj. existuje-li množina $N \subset \Omega$ míry nula taková, že na $\Omega \setminus N$ posloupnost (f_n) bodově konverguje k f), pak je funkce f μ-měřitelná.*

Léviho věta o monotónní konvergenci. *Nechť (Ω, Σ, μ) je prostor s mírou. Nechť (f_n) je neklesající posloupnost nezáporných měřitelných funkcí na Ω. Pak*

$$\int_\Omega \lim_n f_n \,\mathrm{d}\mu = \lim_n \int_\Omega f_n \,\mathrm{d}\mu.$$

Poznámka. Předpoklad nezápornosti lze nahradit předpokladem $\int f_1 \,\mathrm{d}\mu > -\infty$.

Lebesgueova věta o dominované konvergenci. *Nechť (Ω, Σ, μ) je prostor s mírou. Nechť (f_n) je posloupnost (komplexních) měřitelných funkcí na Ω. Předpokládejme, že platí následující dvě podmínky:*

- *Posloupnost (f_n) skoro všude konverguje k nějaké funkci f.*
- *Existuje nezáporná integrovatelná funkce g taková, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $|f_n| \le g$ skoro všude na Ω.*

Pak

$$\lim_n \int_\Omega f_n \,\mathrm{d}\mu = \int f \,\mathrm{d}\mu.$$

A2.3 Integrály závislé na parametru

Věta o spojitosti integrálu v závislosti na parametru. *Nechť (Ω, Σ, μ) je prostor s mírou a nechť (M, d) je metrický prostor. Předpokládejme, že funkce $f : \Omega \times M \to \mathbb{C}$ splňuje následující podmínky:*

- *Pro každé $x \in M$ je funkce $\omega \mapsto f(\omega, x)$ měřitelná.*
- *Pro skoro všechna $\omega \in \Omega$ je funkce $x \mapsto f(\omega, x)$ spojitá na M.*
- *Existuje nezáporná integrovatelná funkce g na Ω, pro kterou platí $|f(\omega, x)| \le g(\omega)$ na $\Omega \times M$.*

Pak je funkce $F(x) = \displaystyle\int_\Omega f(\omega, x)\,\mathrm{d}\mu(\omega)$ spojitá na M.

Poznámka: Protože spojitost je lokální vlastnost, je možné v předchozí větě třetí podmínku nahradit její následující slabší verzí:

Pro každé $y \in M$ existuje okolí U bodu y a nezáporná integrovatelná funkce g na Ω, pro kterou platí $|f(\omega, x)| \le g(\omega)$ na $\Omega \times U$.

Věta o derivaci integrálu v závislosti na parametru. *Nechť (Ω, Σ, μ) je prostor s mírou a nechť $I \subset \mathbb{R}$ je otevřený interval. Předpokládejme, že funkce $f : \Omega \times I \to \mathbb{C}$ splňuje následující podmínky:*

- *Pro každé $t \in I$ je funkce $\omega \mapsto f(\omega, t)$ měřitelná.*
- *Pro skoro všechna $\omega \in \Omega$ má funkce $t \mapsto f(\omega, t)$ vlastní derivaci v každém bodě intervalu I. (Tuto derivaci značíme $\frac{\partial f}{\partial t}(\omega, t)$.)*
- *Existuje $t_0 \in I$, pro které je funkce $\omega \mapsto f(\omega, t_0)$ integrovatelná,*
- *Existuje nezáporná integrovatelná funkce g na Ω, pro kterou platí $\left|\frac{\partial f}{\partial t}(\omega, t)\right| \le g(\omega)$ na $\Omega \times I$*

Pak je funkce $F(t) = \int_\Omega f(\omega, t)\,\mathrm{d}\mu(\omega)$ definovaná na celém intervalu I, má v každém bodě tohoto intervalu vlastní derivaci a platí

$$F'(t) = \int \frac{\partial f}{\partial t}(\omega, t)\,\mathrm{d}\mu(\omega), \quad t \in I.$$

Poznámka: Protože derivace je lokální pojem, je možné v předchozí větě čtvrtou podmínku nahradit její následující slabší verzí:

Pro každé $s \in I$ existuje okolí U bodu s a nezáporná integrovatelná funkce g na Ω, pro kterou platí $\left|\frac{\partial f}{\partial t}(\omega, t)\right| \le g(\omega)$ na $\Omega \times U$.

A2.4 Lebesgueova míra a integrál na $\mathbb{R}^n$

Konstrukce Lebesgueovy míry. *Nechť $n \in \mathbb{N}$.*

- *Nechť $I_1, \dots, I_n$ jsou omezené intervaly v $\mathbb{R}$. Jejich kartézský součin $I_1 \times \cdots \times I_n$ nazýváme* **zobecněným intervalem** *v $\mathbb{R}^n$.* **Objem** *zobecněného intervalu $I_1 \times \cdots \times I_n$ definujeme vzorcem*

  $$\mathrm{vol}(I_1 \times \cdots \times I_n) = |I_1| \cdots |I_n|,$$

  kde $|I_j|$ značí délku intervalu I_j.
- *Pro $A \subset \mathbb{R}^n$ definujeme* **vnější Lebesgueovu míru** *množiny A předpisem*

$$\lambda_n^*(A) = \inf\left\{\sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{vol}(J_k);\ J_k \text{ jsou zobecněné intervaly splňující } A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} J_k\right\}.$$

- *Nechť $\mathcal{B}_n$ značí borelovskou σ-algebru v $\mathbb{R}^n$, tj. nejmenší σ-algebru obsahující otevřené množiny. Pak $\lambda_n^*|_{\mathcal{B}_n}$ je σ-aditivní míra.*
- *Je-li J zobecněný interval, pak $\lambda_n^*(J) = \mathrm{vol}(J)$.*
- **Lebesgueovou mírou** *na $\mathbb{R}^n$ rozumíme zúplnění míry $\lambda_n^*|_{\mathcal{B}_n}$. Značíme ji λ_n. Množiny z příslušné σ-algebry se nazývají* **lebesgueovsky měřitelné**.

Jiná verze konstrukce.

- *Každá otevřená množina $U \subset \mathbb{R}^n$ je sjednocením disjunktní posloupnosti zobecněných intervalů (polouzavřených). Míru množiny U (značíme $\lambda_n(U)$ a) definujeme jako součet objemů takových zobecněných intervalů. Výsledek nezávisí na konkrétní volbě oné posloupnosti zobecněných intervalů.*
- *Je-li $F \subset \mathbb{R}^n$ uzavřená, definujeme $\lambda_n(F) = \inf\{\lambda_n(U); U \supset F \text{ otevřená}\}$.*
- *Je-li $B \subset \mathbb{R}^n$ borelovská, pak*
  $\inf\{\lambda_n(U); U \supset B \text{ otevřená}\} = \sup\{\lambda_n(F); F \subset B \text{ uzavřená}\}$.
  Společnou hodnotu nazveme $\lambda_n(B)$.
- *Takto definovaná množinová funkce λ_n je σ-aditivní míra na $\mathcal{B}_n$. Jejím zúplněním je Lebesgueova míra.*

Vztah k Riemannovu integrálu. *Nechť $(a, b) \subset \mathbb{R}$ je otevřený interval a nechť f je spojitá nezáporná funkce na (a, b). Pak*

$$\int_{(a,b)} f \, \mathrm{d}\lambda_1 = (ZR) \int_a^b f = \lim_{u \to a+} \lim_{v \to b-} (R) \int_u^v f,$$

kde (R) značí Riemannův integrál a (ZR) zobecněný Riemannův integrál. Tento integrál lze tedy počítat pomocí primitivní funkce s využitím Newton-Leibnizovy formule.

Fubiniova věta v $\mathbb{R}^n$. *Nechť $k, l \in \mathbb{N}$ a $f : \mathbb{R}^{k+l} \to \mathbb{C}$ je lebesgueovsky měřitelná funkce. Předpokládejme, že platí aspoň jedna z podmínek*

- *$f \geq 0$;*
- *f je integrovatelná na $\mathbb{R}^{k+l}$.*

Pak platí

$$\int_{\mathbb{R}^{k+l}} f \, \mathrm{d}\lambda_{k+l} = \int_{\mathbb{R}^k} \left(\int_{\mathbb{R}^l} f(x, y) \, \mathrm{d}\lambda_l(y) \right) \mathrm{d}\lambda_k(x) = \int_{\mathbb{R}^l} \left(\int_{\mathbb{R}^k} f(x, y) \, \mathrm{d}\lambda_k(x) \right) \mathrm{d}\lambda_l(y),$$

kde prvky $\mathbb{R}^{k+l}$ píšeme ve tvaru (x, y), kde $x \in \mathbb{R}^k$ a $y \in \mathbb{R}^l$.

Poznámky:

(1) Fubiniovu větu lze použít i na funkce, které nejsou definované na celém $\mathbb{R}^{k+l}$, ale jen na nějaké měřitelné množině $A \subset \mathbb{R}^{k+l}$. V takovém případě funkci rozšíříme na $\mathbb{R}^{k+l}$ tak, že ji mimo množinu A dodefinujeme hodnotou nula.

(2) Přepoklady Fubiniovy věty (ve verzi z předchozího bodu) jsou splněny například, pokud $A \subset \mathbb{R}^{k+l}$ je omezená měřitelná množina a $f : A \to \mathbb{C}$ je omezená měřitelná funkce. Tedy speciálně v případě, že A je kompaktní a f je spojitá na A.