Appendix A1: **Stejnoměrná a lokálně stejnoměrná konvergence**

Definice. Nechť M je množina a (f_n) je posloupnost komplexních funkcí na M.

- Říkáme, že posloupnost (f_n) na množině M **bodově konverguje** k funkci f (píšeme $f_n \to f$ na M), pokud
$$\forall x \in M\colon f_n(x) \to f(x),$$
tj.
$$\forall x \in M\, \forall \varepsilon > 0\, \exists n_0 \in \mathbb{N}\, \forall n \geq n_0\colon |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$
- Říkáme, že posloupnost (f_n) na množině M **stejnoměrně konverguje** k funkci f (píšeme $f_n \rightrightarrows f$ na M), pokud
$$\forall \varepsilon > 0\, \exists n_0 \in \mathbb{N}\, \forall n \geq n_0\, \forall x \in M\colon |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon,$$
neboli
$$\sup_{x\in M} |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Poznámky.

- *Tytéž pojmy lze definovat a používat pro reálné funkce, protože reálné funkce jsou speciálním případem komplexních funkcí. Obdobně lze tyto pojmy definovat i pro funkce s hodnotami v nějakém metrickém prostoru, ale toto zobecnění potřebovat nebudeme.*
- *Pokud $f_n \rightrightarrows f$ na M, pak $f_n \to f$ na M.*
- *Může se stát, že $f_n \to f$ na M, ale $f_n \not\rightrightarrows f$ na M. Jako příklad lze zvolit $M = U(0,1)$ (v $\mathbb{R}$ nebo v $\mathbb{C}$), $f_n(x) = x^n$ a $f = 0$.*

Definice. Nechť M je metrický prostor a (f_n) je posloupnost komplexních funkcí na M. Říkáme, že posloupnost (f_n) **lokálně stejnoměrně konverguje** k funkci f (píšeme $f_n \rightrightarrows^{loc} f$ na M), pokud
$$\forall x \in M\, \exists U \text{ okolí bodu } x\colon f_n \rightrightarrows f \text{ na } U.$$

Poznámky. *Nechť M je metrický prostor a (f_n) je posloupnost komplexních funkcí na M.*

- *Pokud $f_n \rightrightarrows f$ na M, pak $f_n \rightrightarrows^{loc} f$ na M. Pokud $f_n \rightrightarrows^{loc} f$ na M, pak $f_n \to f$ na M.*
- *Obrácené implikace neplatí. Pro první o tom svědčí výše uvedený příklad (funkce $x \mapsto x^n$ na $U(0,1)$). Pro druhou implikaci to lze ilustrovat na příkladu*
$$M = [0,1], f_n(x) = \begin{cases} (n+1)x, & x \in [0, \frac{1}{n+1}], \\ (1+\frac{1}{n})(1-x), & x \in [\frac{1}{n}, 1], \end{cases} \quad f = 0.$$

- *Pokud $f_n \rightrightarrows^{loc} f$ na M, pak pro každou kompaktní podmnožinu $K \subset M$ platí $f_n \rightrightarrows f$ na K. Obrácená implikace platí v případě, že M je lokálně kompaktní (tedy například M je otevřená podmnožina $\mathbb{C}$). Máme tedy následující ekvivalenci:*
  Nechť $U \subset \mathbb{C}$ je otevřená. Pak
  $$f_n \rightrightarrows^{loc} f \text{ na } U \iff \forall K \subset U \text{ kompaktní: } f_n \rightrightarrows f \text{ na } K.$$

Věta o zachovávání spojitosti. *Nechť M je metrický prostor a (f_n) je posloupnost spojitých funkcí na M. Pokud $f_n \rightrightarrows^{loc} f$ na M, pak f je spojitá na M.*

Moore-Osgoodova věta o záměně limit. *Nechť M je metrický prostor, $A \subset M$ a $x \in M$ je hromadný bod množiny A. Předpokládejme, že (f_n) je posloupnost komplexních funkcí definovaných na množině A. Nechť jsou dále splněny následující dvě podmínky:*

(1) *Pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje limita $a_n = \lim\limits_{y \to x, y \in A} f_n(y) \in \mathbb{C}$;*

(2) *$f_n \rightrightarrows f$ na A.*

Pak
$$\lim_{y \to x, y \in A} f(y) = \lim\nolimits_{n\to\infty} a_n,$$
tj. obě limity existují a rovnají se.

Věta o záměně limity a derivace. *Nechť $I \subset \mathbb{R}$ je otevřený interval a nechť (f_n) je posloupoMnost (reálných či komplexních) funkcí na intervalu I. Předpokládejme, že platí následující tři podmínky:*

- *Funkce f_n mají v každém bodě intervalu I vlastní derivaci.*
- *$f_n' \rightrightarrows^{loc} g$ na I.*
- *Existuje takový bod $x_0 \in I$, že posloupnost $(f_n(x_0))$ konverguje.*

Pak posloupnost (f_n) na intervalu I lokálně stejnoměrně konverguje k nějaké funkci f. Navíc $f' = g$.

Definice. Nechť M je množina a (u_n) je posloupnost komplexních funkcí na M. Říkáme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ na množině M konverguje bodově (stejnoměrně), pokud příslušným způsobem konverguje posloupnost částečných součtů (tj. posloupnost $(u_1+\cdots+u_n)_n$. Analogicky pro lokálně stejnoměrnou konvergenci.

Weierstrassovo kritérium stejnoměrné konvergence. *Nechť M je množina a (u_n) je posloupnost komplexních funkcí na M. Předpokládejme, že existuje posloupnost nezáporných čísel (c_n) splňující následující dvě podmínky:*

- *Pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $|u_n| \leq c_n$ na M;*
- *řada $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ konverguje.*

Pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ konverguje (absolutně a) stejnoměrně na M.