III.2 Integrály a křivkové integrály závislé na parametru

Věta 6 (o derivaci integrálu podle komplexní proměnné). *Nechť $I \subset \mathbb{R}$ je interval a $\Omega \subset \mathbb{C}$ je oblast. Nechť funkce $F : I \times \Omega \to \mathbb{C}$ splňuje následující podmínky:*

(1) *Pro každé $z \in \Omega$ je funkce $t \mapsto F(t,z)$ měřitelná na intervalu I.*
(2) *Pro skoro všechna $t \in I$ má funkce $z \mapsto F(t,z)$ spojitou derivaci podle komplexní proměnné na Ω.*
(3) *Existuje $z_0 \in \Omega$, pro které je funkce $t \mapsto F(t,z_0)$ integrovatelná na I.*
(4) *Pro každé $z \in \Omega$ existuje U okolí z a integrovatelná funkce h na I, pro kterou platí $\left|\frac{\partial F}{\partial z}(t,w)\right| \le h(t)$ pro všechna $w \in U$ pro skoro všechna $t \in I$.*

Potom funkce

$$g(z) = \int_I F(t,z)\,\mathrm{d}t, \qquad z \in \Omega$$

je holomorfní na Ω a pro $z \in \Omega$ platí

$$g'(z) = \int_I \frac{\partial F}{\partial z}(t,z)\,\mathrm{d}t.$$

Poznámka: V předchozí větě lze interval I nahradit libovolným prostorem s mírou.

Věta 7 (o záměně křivkového integrálu a ...). *Nechť $\varphi : [a,b] \to \mathbb{C}$ je cesta.*

(1) *Nechť pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $f_n : \langle\varphi\rangle \to \mathbb{C}$ spojitá funkce a tyto funkce nechť na $\langle\varphi\rangle$ konvergují stejnoměrně k funkci f. Pak $\int_\varphi f_n \to \int_\varphi f$.*
(2) *Nechť pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $f_n : \langle\varphi\rangle \to \mathbb{C}$ spojitá funkce a tyto funkce nechť na $\langle\varphi\rangle$ konvergují bodově ke spojité funkci f. Je-li posloupnost funkce (f_n) stejně omezená na $\langle\varphi\rangle$, pak $\int_\varphi f_n \to \int_\varphi f$.*
(3) *Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je neprázdná otevřená množina a $F : \langle\varphi\rangle \times G \to \mathbb{C}$ je spojitá funkce. Pak funkce*

$$g(w) = \int_\varphi F(z,w)\,\mathrm{d}z, \qquad w \in G$$

je spojitá na G.
(4) *Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je otevřená, $F : \langle\varphi\rangle \times G \to \mathbb{C}$ je spojitá funkce a parciální derivace funkce F podle druhé proměnné (tj. derivace funkce $w \mapsto F(z,w)$ podle komplexní proměnné) je spojitá na $\langle\varphi\rangle \times G$. Potom funkce*

$$g(w) = \int_\varphi F(z,w)\,\mathrm{d}z, \qquad w \in G$$

je holomorfní na G a pro $w \in G$ platí

$$g'(w) = \int_\varphi \tfrac{\partial F}{\partial w}(z,w)\,\mathrm{d}z.$$