

III.1 Křivky a křivkový integrál v \mathbb{C}

Definice. Křivkou v \mathbb{C} rozumíme spojitě zobrazení uzavřeného intervalu do \mathbb{C} , tj. spojitou funkci $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$, kde $a < b$ jsou reálná čísla. Je-li $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ křivka, pak

- **obrazem křivky** φ rozumíme její obor hodnot, tj. množinu

$$\langle \varphi \rangle = \varphi([a, b]) = \{\varphi(t) : t \in [a, b]\};$$

- **počátečním bodem křivky** φ rozumíme bod $\varphi(a)$, **koncovým bodem** bod $\varphi(b)$;
- křivku φ nazýváme **uzavřenou**, pokud $\varphi(a) = \varphi(b)$;
- **opačnou křivkou** k φ rozumíme křivku $\dot{\varphi} : [-b, -a] \rightarrow \mathbb{C}$ definovanou vzorcem $\dot{\varphi}(t) = \varphi(-t)$;
- je-li navíc $\psi : [c, d] \rightarrow \mathbb{C}$ křivka, pro kterou $\psi(c) = \varphi(b)$, pak jejich **spojením** $\varphi \dot{+} \psi$ rozumíme křivku definovanou na intervalu $[a, b + d - c]$ vzorcem

$$(\varphi \dot{+} \psi)(t) = \begin{cases} \varphi(t), & t \in [a, b], \\ \psi(t - b + c), & t \in [b, b + d - c]; \end{cases}$$

- **délkou křivky** φ rozumíme

$$V(\varphi) = \sup \left\{ \sum_{j=1}^n |\varphi(t_j) - \varphi(t_{j-1})| : n \in \mathbb{N}, a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b \right\}.$$

Křivku $\varphi(t) = a + re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, kde $a \in \mathbb{C}$ a $r > 0$, nazýváme **kladně orientovaná kružnice o středu a a poloměru r** . Opačnou křivku nazýváme **záporně orientovaná kružnice**.

Křivku $\varphi(t) = a + t(b - a)$, $t \in [0, 1]$, kde $a, b \in \mathbb{C}$, nazýváme **orientovaná úsečka** $[a, b]$.

Cestou neboli **po částech hladkou křivkou** v \mathbb{C} rozumíme křivku $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$, pro kterou existuje takové dělení $a = s_0 < s_1 < \dots < s_n = b$, že pro každé $j = 1, \dots, n$ je funkce φ třídy C^1 na $[s_{j-1}, s_j]$ (tj. derivace φ' je spojitá na (s_{j-1}, s_j) a má v krajních bodech s_{j-1} a s_j vlastní jednostranné limity).

Poznámka: Je-li $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ cesta, pak $\varphi'(t)$ existuje pro všechna $t \in (a, b)$ až na konečně mnoho výjimek a navíc je φ' omezená na svém definičním oboru.

Je-li navíc $f : \langle \varphi \rangle \rightarrow \mathbb{C}$ spojitá funkce, definujeme **integrál funkce f podél cesty φ** vzorcem

$$\int_{\varphi} f = \int_{\varphi} f(z) dz = \int_a^b f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt,$$

kde integrál na pravé straně je zobecněný Riemannův, tj. roven

$$\sum_{j=1}^n \int_{s_{j-1}}^{s_j} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt.$$

Na tento integrál lze pohlížet i jako na Lebesgueův, což budeme často dělat.

Poznámky.

- (1) Je-li $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ cesta, pak $V(\varphi) = \int_a^b |\varphi'(t)| dt$.
- (2) Právě definovaný křivkový integrál úzce souvisí s křivkovým integrálem druhého druhu. Pokud ztotožníme \mathbb{C} s \mathbb{R}^2 a použijeme značení z Věty I.3, pak platí:
 - $\operatorname{Re} \int_{\varphi} f$ je rovna integrálu druhého druhu funkce \widetilde{f} podél křivky φ ,
 - $\operatorname{Im} \int_{\varphi} f$ je rovna integrálu druhého druhu funkce $i\widetilde{f}$ podél křivky φ .
- (3) Další vztah výše definovaného křivkového integrálu ke křivkovému integrálu z reálné analýzy je následující: Nechť $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ je cesta, přičemž $\varphi|_{[a,b]}$ je prostá a $\varphi'(t) \neq 0$ až na konečně mnoho výjimek. Pro $z \in \langle \varphi \rangle$ zvolme $t \in [a, b]$ splňující $\varphi(t) = z$ a označme $\nu(z) = \frac{1}{|\varphi'(t)|} (\operatorname{Im} \varphi'(t), -\operatorname{Re} \varphi'(t))$, pokud je výraz definován. Pak pro \mathcal{H}^1 -skoro všechna $z \in \langle \varphi \rangle$ je $\nu(z)$ definováno a je to normálový vektor ke křivce φ . Navíc $\int_{\varphi} f = \int_{\langle \varphi \rangle} \langle i\widetilde{f}(z) + i\widetilde{f}(z), \nu(z) \rangle d\mathcal{H}^1(z)$.

Větička 1. Necht' $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ je cesta.

(1) Necht' h je rostoucí zobrazení intervalu $[c, d]$ na interval $[a, b]$, které je třídy C^1 .

Pak

$$\int_{\varphi \circ h} f = \int_{\varphi} f \text{ pro každou spojitou } f : \langle \varphi \rangle \rightarrow \mathbb{C}.$$

(2) $\int_{\dot{-}\varphi} f = - \int_{\varphi} f$ pro každou spojitou $f : \langle \varphi \rangle \rightarrow \mathbb{C}$.

(3) Je-li $\psi : [c, d] \rightarrow \mathbb{C}$ cesta splňující $\psi(c) = \varphi(b)$, pak

$$\int_{\varphi \dot{+} \psi} f = \int_{\varphi} f + \int_{\psi} f \text{ pro každou spojitou } f : \langle \varphi \rangle \cup \langle \psi \rangle \rightarrow \mathbb{C}.$$

(4) $\left| \int_{\varphi} f \right| \leq V(\varphi) \cdot \max_{z \in \langle \varphi \rangle} |f(z)|$ pro každou spojitou $f : \langle \varphi \rangle \rightarrow \mathbb{C}$.

Větička 2. Necht' f je komplexní funkce komplexní proměnné spojitá na okolí bodu $a \in \mathbb{C}$. Pak

$$f(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_{[a, a+h]} f.$$

Definice. Necht' $G \subset \mathbb{C}$ je otevřená a $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ je funkce. Funkci $F : G \rightarrow \mathbb{C}$ nazýváme **primitivní funkcí k f na G** , pokud $F'(z) = f(z)$ pro každé $z \in G$.

Větička 3. Necht' $G \subset \mathbb{C}$ je otevřená, $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ je spojitá funkce a F je primitivní funkce k f na G . Pak pro každou cestu $\varphi : [a, b] \rightarrow G$ platí $\int_{\varphi} f = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a))$.

Speciálně, je-li φ uzavřená cesta v G , pak $\int_{\varphi} f = 0$.

Věta 4 (charakterizace oblasti). Necht' $\Omega \subset \mathbb{C}$ je otevřená. Pak následující podmínky jsou ekvivalentní.

- Ω je **souvislá** (tj. pro každou neprázdnou $G \subset \Omega$ takovou, že G i $\Omega \setminus G$ jsou otevřené množiny, platí $G = \Omega$).
- Ω je **křivkově souvislá** (tj. pro každé dva body $z, w \in \Omega$ existuje spojitě zobrazení $\varphi : [0, 1] \rightarrow \Omega$, pro které $\varphi(0) = z$ a $\varphi(1) = w$).
- Každé dva body v Ω lze spojit lomenou čarou v Ω (tj. pro každé dva body $z, w \in \Omega$ existuje konečná posloupnost bodů $z = u_0, u_1, \dots, u_n = w$ taková, že pro každé $j = 1, \dots, n$ úsečka spojující u_{j-1} a u_j leží celá v Ω).

Poznámka: Analogie Věty 4 platí i pro $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

Definice. Otevřenou souvislou podmnožinu \mathbb{C} nazýváme **oblast**.

Věta 5 (primitivní funkce a křivkový integrál). Necht' $\Omega \subset \mathbb{C}$ je oblast a $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ je spojitá funkce. Pak následující podmínky jsou ekvivalentní.

- f má v Ω primitivní funkci.
- Křivkový integrál v Ω **nezávisí na cestě**, tj. kdykoli $\varphi : [a, b] \rightarrow \Omega$ a $\psi : [c, d] \rightarrow \Omega$ jsou dvě cesty splňující $\varphi(a) = \psi(c)$ a $\varphi(b) = \psi(d)$, pak $\int_{\varphi} f = \int_{\psi} f$.

(iii) Pro každou uzavřenou cestu $\varphi : [a, b] \rightarrow \Omega$ je $\int_{\varphi} f = 0$.

Poznámka: Věta 5 je variantou hlavní věty teorie pole.