II.1 Mocninné řady – základní vlastnosti

Definice. Nechť $a \in \mathbb{C}$ a $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$ je posloupnost komplexních čísel. Nekonečnou řadu funkcí tvaru

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n \tag{M}$$

nazýváme **mocninnou řadou o středu** a.

Poloměrem konvergence řady (M) rozumíme $R \in [0, +\infty]$ definované vzorcem

$$R = \sup\{r \in [0, +\infty);\ \sum_{n=0}^{\infty} |c_n| r^n \text{ konverguje}\}.$$

Množinu

$$U(a, R) = \{z \in \mathbb{C}\, |z-a| < R\},$$

pak nazýváme **kruhem konvergence** řady (M).

Věta 1. *Uvažme mocninou řadu* (M) *a* R *nechť je její poloměr konvergence.*

(1) *Řada* (M) *konverguje absolutně (a lokálně stejnoměrně) na svém kruhu konvergence* $U(a, R)$. *Řada* (M) *diverguje na* $\mathbb{C} \setminus \overline{U(a, R)}$.

(2) *Položme* $L = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}$. *Pak poloměr konvergence řady* (M) *je*

$$R = \begin{cases} \frac{1}{L}, & L > 0, \\ +\infty, & L = 0. \end{cases}$$

(3) *Existuje-li* $\lim_{n\to\infty} \frac{|c_{n+1}|}{|c_n|}$, *rovná se číslu* L *z předchozího bodu.*

(4) *Mocninné řady* $\sum_{n=1}^{\infty} n c_n (z-a)^{n-1}$ *a* $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} (z-a)^{n+1}$ *mají stejný poloměr konvergence jako řada* (M).

Lemma 2. *Uvažme mocninou řadu* (M) *a* R *nechť je její poloměr konvergence. Předpokládejme, že* $R > 0$. *Definujme funkce*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n \text{ a } g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n (z-a)^{n-1}, \quad z \in U(a, R).$$

Dále definujme pomocné funkce

$$u(t) = \sum_{n=1}^{\infty} n\, |c_n|\, t^{n-1} \text{ a } v(t) = \sum_{n=2}^{\infty} n^2\, |c_n|\, t^{n-2}, \quad t \in [0, R).$$

Nechť $r \in [0, R)$ *a* $z, w \in \overline{U(a, r)}$. *Pak platí nerovnosti*

$$|f(z) - f(w)| \le u(r)\, |z-w| \text{ a } \left| \frac{f(z) - f(w)}{z-w} - g(z) \right| \le v(r)\, |z-w|\,.$$

Věta 3 (derivace a integrace mocninné řady). *Uvažujme řadu* (M) *a nechť* $R > 0$ *její poloměr konvergence. Definujme funkci* $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$, $z \in U(a, R)$. *Pak platí:*

(i) *Funkce* f *je spojitá na* $U(a, R)$.

(ii) *Funkce* f *je holomorfní na* $U(a, R)$ *a platí*

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n (z-a)^{n-1}, \qquad z \in U(a, R).$$

(iii) *Funkce* $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} (z-a)^{n+1}$ *je holomorfní na* $U(a, R)$ *a pro každé* $z \in U(a, R)$ *platí* $F'(z) = f(z)$.