Lemma II. 2

Uvažme mocninnou řadu $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$, R buď její poloměr konvergence. Nechť $R>0$.

Definujme $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n\, c_n (z-a)^{n-1}$$

Pak platí:

(1) f je definována (alespoň) na $U(a,R)$

[dle Věty 1 (1)]

(2) g je definována ~~na~~ (alespoň) na $U(a,R)$

[Věta 1(4) $\Rightarrow$ ta mocninná řada má poloměr konvergence také R, lze tedy použít Věta 1(1)]

Dále definujme $u(t) = \sum_{n=1}^{\infty} n\,|c_n|\, t^{n-1}$, $t \in [0,R)$

[Řada konverguje, protože mocninná řada z definice g konverguje absolutně na $U(a,R)$ (z Věty 1(1)) a toto aplikujeme pro $z = a+t$]

(3) Nechť $r \in [0,R)$, $z, w \in \overline{U(a,r)}$

Pak

$$|f(z) - f(w)| \le u(r) \cdot |z-w|$$

Policzmy: $\left| f(z) - f(w) \right| = \left| \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n - \sum_{n=0}^{\infty} c_n (w-a)^n \right|$

$$= \left| \sum_{n=1}^{\infty} c_n \left((z-a)^n - (w-a)^n \right) \right| =$$

człon pro n=0 se odečtou

$$= \left| \sum_{n=1}^{\infty} c_n \underbrace{\left((z-a) - (w-a) \right)}_{= z-w} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} (z-a)^k (w-a)^{n-k-1} \right|$$

$$\le \sum_{n=1}^{\infty} \left(|c_n| \cdot |z-w| \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \underbrace{|z-a|^k \cdot |w-a|^{n-k-1}}_{\le r^{n-1}, \text{ protože } |z-a| \le r,\ |w-a| \le r} \right)$$

$$\le |z-w| \cdot \sum_{n=1}^{\infty} |c_n| \cdot n r^{n-1} = |z-w| \cdot u(r).$$

Dále definujme $v(t) = \sum_{n=2}^{\infty} n^2 |c_n| t^{n-2}$, $t \in [0, R)$

v předchozí definováni, nebot řada konverguje podle odmocninového kritéria

(4) $r \in [0,R)$, $z, w \in \overline{U(a,r)} \Rightarrow \left| \frac{f(z)-f(w)}{z-w} - g(z) \right| \le v(r)|z-w|$

Dle výpočtu v (3) vidíme, že

$$\frac{f(z)-f(w)}{z-w} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot \left(\sum_{k=0}^{n-1} (z-a)^k (w-a)^{n-k-1} \right)$$

Počítejme tedy:

$$\left|\frac{f(z)-f(w)}{z-w} - g(z)\right| = \left|\sum_{n=1}^{\infty} c_n \left(\sum_{k=0}^{n-1} (z-a)^k (w-a)^{n-k-1}\right) - \sum_{n=1}^{\infty} n c_n (z-a)^{n-1}\right|$$

$$= \left|\sum_{n=2}^{\infty} c_n \cdot \left(\sum_{k=0}^{n-1} (z-a)^k \left((w-a)^{n-k-1} - (z-a)^{n-k-1}\right)\right)\right|$$

$$\le \sum_{n=2}^{\infty} |c_n| \cdot \left(\sum_{k=0}^{n-1} \underbrace{|z-a|^k}_{\le r} \underbrace{\left|(w-a)^{n-k-1} - (z-a)^{n-k-1}\right|}\right) \le (*)$$

$$= \left|\underbrace{\left((w-a) - (z-a)\right)}_{w-z} \underbrace{\sum_{j=0}^{n-k-2} (w-a)^j (z-a)^{n-k-2-j}}_{|\cdot| \le r^{n-k-2}}\right|$$

$$(*) \le \sum_{n=2}^{\infty} |c_n| \sum_{k=0}^{n-1} r^k \cdot |w-z| \cdot \underbrace{(n-k-1)}_{\le n} r^{n-k-2}$$

$$\le |w-z| \cdot \sum_{n=2}^{\infty} |c_n| \, n^2 \, r^{n-2} = |w-z| \cdot \sigma(r).$$

Takto jsme dokázali Lemma 2

Věta 3 Používáme značení z L2

(i) f je spojitá na $U(a,R)$:

$z \in U(a,R)$ Nechť $r > 0$ je takové, že $|z|+r < R$

Pak $\overline{U(z,r)} \subset \overline{U(a,|z|+r)}$

Tedy $\lim_{w\to z} |f(w)-f(z)| \overset{L2}{\le} \lim_{w\to z} |z-w| \cdot \sigma(|z|+r) = 0$

To dokazuje spojitost v bodě z.

(ii) f je holomorfní na $U(a,R)$ a $f'(z)=g(z)$

[$z \in U(a,R)$ ... vezměme $r>0$, že $|z|+r<R$

Pro $w \in \overline{U(z,r)}$ platí odhad z 2

$$\left| \frac{f(z)-f(w)}{z-w} - g(z) \right| \leq N(r+|z|)\,|z-w| \xrightarrow{w \to z} 0$$

$\Rightarrow$ $f'(z)=g(z)$ dle definice derivace]

(iii) $$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} (z-a)^{n+1}, \quad z \in U(a,R)$$

F je holomorfní na $U(a,R)$ a $F'(z)=f(z)$

[V1(4) ... ta mocninná řada má poloměr konvergence R

V3(2) $\Rightarrow$ F je holomorfní na $U(a,R)$ a $F'=f$]