IV.4 Laurentovy řady a funkce holomorfní v mezikruží

Poznámka. Jméno Laurent se čte francouzsky, tj. přibližně **Lorán**.

Definice. **Laurentovou řadou o středu** $a \in \mathbb{C}$ rozumíme symbol

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-a)^n, \tag{$*$}$$

kde $a_n \in \mathbb{C}$ pro každé $n \in \mathbb{Z}$. **Regulární částí** řady (*) rozumíme mocninnou řadu

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n,$$

hlavní částí řady (*) rozumíme symbol

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n(z-a)^n. \tag{$**$}$$

Říkáme, že **hlavní část řady** (*) **konverguje** (**v bodě** z, **absolutně**, **stejnoměrně na množině** M, **lokálně stejnoměrně na množině** M, atp.), pokud příslušnou vlastnost má řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z-a)^{-n}.$$

Součet této řady nazveme **součtem hlavní části řady** (*) a značíme jej rovněž ($**$).

Říkáme, že **řada** ($*$) **konverguje** (**v bodě** z, **absolutně**, **stejnoměrně na množině** M, **lokálně stejnoměrně na množině** M, atp.), pokud příslušnou vlastnost má regulární i hlavní část. **Součtem řady** ($*$) rozumíme součet součtu regulární části a součtu hlavní části, tj.

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n + \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n(z-a)^n.$$

Definice. Nechť $0 \le r < R \le +\infty$ a $a \in \mathbb{C}$. Pak označme

$$P(a,r,R) = \{z \in \mathbb{C} : r < |z-a| < R\}.$$

Tuto množinu nazveme **mezikružím o středu** a**, vnitřním poloměru** r **a vnějším poloměru** R.

Poznámka. V definici mezikruží se připouští i hodnoty $r = 0$ či $R = +\infty$. V těchto speciálních případech platí

- $P(a,0,R) = P(a,R)$ pro $R \in (0,+\infty)$;
- $P(a,r,+\infty) = \mathbb{C} \setminus \overline{U(a,r)}$ pro $r \in (0,+\infty)$;
- $P(a,0,+\infty) = \mathbb{C} \setminus \{a\}$.

Větička 8. *Mějme Laurentovu řadu* ($*$)*. Pak existují* $r, R \in [0,+\infty]$*, pro která platí:*

- *Regulární část řady* ($*$) *konverguje absolutně a lokálně stejnoměrně na*
  $$\{z \in \mathbb{C} : |z-a| < R\}$$
  a diverguje pro $|z-a| > R$.
- *Hlavní část řady* ($*$) *konverguje absolutně a lokálně stejnoměrně na*
  $$\{z \in \mathbb{C} : |z-a| > r\}$$
  a diverguje pro $|z-a| < r$.

Je-li $r < R$*, pak řada* ($*$) *konverguje absolutně a lokálně stejnoměrně na mezikruží* $P(a,r,R)$ *a její součet je na tomto mezikruží holomorfní. Toto mezikruží pak nazýváme* **mezikružím konvergence řady** ($*$).

Větička 9. *Nechť $a \in \mathbb{C}$, $0 \leq r < R \leq +\infty$ a $\theta \in [0, 2\pi)$. Nechť*

$$G = P(a, r, R) \setminus \{a + te^{i\theta} : t \in (0, +\infty)\}.$$

Pak pro množinu G platí Cauchyova věta, tj., pro každou f holomorfní na G a každou uzavřenou cestu φ v G platí $\int_\varphi f = 0$.

Poznámka: V případě, že $r = 0$, je množina G z Větičky 9 hvězdovitá (viz poznámku za definicí rezidua). V obecném případě se několikrát použije poznámka o nalepování za Větou III.13.

Věta 10. *Nechť f je holomorfní funkce na mezikruží $P(a, r, R)$, kde $a \in \mathbb{C}$ a $r < R$. Pro $\rho \in (r, R)$ označme φ_ρ kladně orientovanou kružnici o středu a a poloměru ρ. Pak platí:*

(a) *$\int_{\varphi_\rho} f$ nezávisí na ρ, tj. nabývá stejné hodnoty pro každé $\rho \in (r, R)$.*

(b) (Cauchyův vzorec pro mezikruží) *Nechť $z \in P(a, r, R)$ a $r < \rho_1 < |z-a| < \rho_2 < R$. Pak*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \left(\int_{\varphi_{\rho_2}} \frac{f(w)}{w - z} \, \mathrm{d}w - \int_{\varphi_{\rho_1}} \frac{f(w)}{w - z} \, \mathrm{d}w \right).$$

Věta 11. *Nechť f je holomorfní funkce v mezikruží $P(a, r, R)$, kde $a \in \mathbb{C}$ a $r < R$. Pak f je v $P(a, r, R)$ součtem Laurentovy řady*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - a)^n$$

o středu a, která na $P(a, r, R)$ konverguje. Její koeficienty jsou určeny jednoznačně a platí pro ně

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi_\rho} \frac{f(z)}{(z - a)^{n+1}} \, \mathrm{d}z, \qquad n \in \mathbb{Z},$$

kde $\rho \in (r, R)$ je libovolné a φ_ρ je jako ve Větě 10.

Věta 12. *Nechť f je holomorfní funkce v $P(a, R) = P(a, 0, R)$, kde $a \in \mathbb{C}$ a $R > 0$. Nechť $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - a)^n$ je Laurentova řada funkce f v $P(a, R)$. Pak platí:*

(1) *f má v bodě a odstranitelnou singularitu, právě když $a_n = 0$ pro každé $n < 0$.*

(2) *f má v bodě a pól násobnosti p, právě když $a_{-p} \neq 0$ a $a_n = 0$ pro každé $n < -p$. V tom případě $a_{-1}, \dots, a_{-p}$ jsou koeficenty z Věty 2(2).*

(3) *f má v bodě a podstatnou singularitu, právě když $a_n \neq 0$ pro nekonečně mnoho $n < 0$.*

Navíc ve všech případech platí $\operatorname{res}_a f = a_{-1}$.

Věta 13 (reziduová věta – druhá verze). *Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ je otevřená množina, $M \subset \Omega$ konečná množina a $\varphi : [a, b] \to \Omega \setminus M$ je uzavřená cesta. Předpokládejme, že pro Ω a φ platí Cauchyova věta, tj. $\int_\varphi g = 0$ pro každou funkci g holomorfní na Ω. Pak pro každou f holomorfní na $\Omega \setminus M$ platí*

$$\int_\varphi f = 2\pi i \sum_{a \in M} \operatorname{res}_a f \cdot \operatorname{ind}_\varphi a.$$