

IV.3 Limity některých integrálů

Lemma 5 (Jordanovo). Necht' $\xi \in \mathbb{R}$ a f je funkce spojitá na $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \leq \xi, |z| > R\}$ pro nějaké $R > 0$, pro kterou platí

$$\lim_{\substack{z \rightarrow \infty \\ \operatorname{Re} z \leq \xi}} f(z) = 0.$$

Pro $r > \max\{R, |\xi|\}$ necht' φ_r je křivka definovaná vztahem $\varphi_r(t) = re^{it}$, $t \in [\alpha_r, 2\pi - \alpha_r]$, kde $\alpha_r \in (0, \pi)$ je takové, že $\operatorname{Re}(re^{i\alpha_r}) = \xi$. Pak pro každé $x > 0$ platí

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\varphi_r} f(z) e^{xz} dz = 0.$$

Pokud navíc

$$\lim_{\substack{z \rightarrow \infty \\ \operatorname{Re} z \leq \xi}} z f(z) = 0,$$

pak tvrzení platí i pro $x = 0$.

Lemma 6 (Jordanovo – jiná varianta). Necht' $0 \leq \alpha < \beta \leq \pi$ a f je funkce spojitá na $\{z \in \mathbb{C} : \arg z \in [\alpha, \beta], |z| > R\}$ pro nějaké $R > 0$, pro kterou platí

$$\lim_{\substack{z \rightarrow \infty \\ \arg z \in [\alpha, \beta]}} f(z) = 0.$$

Pro $r > R$ necht' φ_r je křivka definovaná vztahem $\varphi_r(t) = re^{it}$, $t \in [\alpha, \beta]$. Pak pro každé $x > 0$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\varphi_r} f(z) e^{ixz} dz = 0.$$

Lemma 7. Necht' $a \in \mathbb{C}$ a f je holomorfní v nějakém prstencovém okolí bodu a . Dále necht' $\alpha < \beta$ a $\varphi_r(t) = a + re^{it}$, $t \in [\alpha, \beta]$. Pak platí:

- (i) Pokud f je holomorfní v bodě a , pak $\lim_{r \rightarrow 0^+} \int_{\varphi_r} f = 0$.
- (ii) Pokud f má v bodě a pól násobnosti 1, pak

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \int_{\varphi_r} f = i(\beta - \alpha) \operatorname{res}_a f.$$

Poznámka. V případě, že f má v bodě a pól vyšší násobnosti, pak limita z Lemmatu 7 je rovna ∞ s výjimkou „speciálních případů f, α, β “. Přesněji: Necht' f má v bodě a pól násobnosti p a c_{-1}, \dots, c_{-p} jsou koeficienty z Věty 2(2). Pokud pro každé $k \in \{2, \dots, p\}$ platí $c_{-k}(e^{i(k-1)\alpha} - e^{i(k-1)\beta}) = 0$, pak limita je stejná, jako pro pól násobnosti 1; jinak je ∞ . V případě, že koeficienty c_k jsou reálné a počítáme jen limitu reálné či imaginární části integrálu, je speciálních případů více (místo $e^{i(\dots)}$ je v podmínce $\cos(\dots)$ resp. $\sin(\dots)$).