

IV.2 Izolované singularity holomorfních funkcí, rezidua

Definice. Necht' $a \in \overline{\mathbb{C}}$ a $r > 0$. **Prstencovým okolím bodu a o poloměru r** rozumíme množinu $P(a, r) = U(a, r) \setminus \{a\}$.

Věta 2 (Casorati-Weierstrassova). Necht' $a \in \mathbb{C}$, $r > 0$ a funkce f je holomorfní na $P(a, r)$. Pak nastává právě jedna z následujících možností:

- (1) Existuje takové $\rho \in (0, r)$, že f je omezená na $P(a, \rho)$. Pak existuje vlastní $\lim_{z \rightarrow a} f(z)$. Dodefinujeme-li funkci f v bodě a hodnotou této limity, dostaneme funkci holomorfní na $U(a, r)$. (Pak říkáme, že f má v bodě a **odstranitelnou singularitu**.)
- (2) $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = \infty$. Pak existuje právě jedno $p \in \mathbb{N}$, pro které existuje vlastní nenulová $\lim_{z \rightarrow a} (z - a)^p f(z)$. Navíc existují jednoznačně určená čísla $a_{-p}, a_{-(p-1)}, \dots, a_{-1} \in \mathbb{C}$, $a_{-p} \neq 0$, že funkce

$$z \mapsto f(z) - \frac{a_{-1}}{z - a} - \frac{a_{-2}}{(z - a)^2} - \dots - \frac{a_{-p}}{(z - a)^p}$$

má v bodě a odstranitelnou singularitu. (V tomto případě říkáme, že f má v bodě a **pól násobnosti p** .)

- (3) $\lim_{z \rightarrow a} f(z)$ neexistuje. Pak pro každé $\rho \in (0, r)$ je $f(P(a, \rho))$ hustá v \mathbb{C} . (Říkáme, že f má v bodě a **podstatnou singularitu**.)

Poznámka. Platí dokonce **Velká Picardova věta**: Má-li f v bodě z_0 podstatnou singularitu, pak v každém prstencovém okolí z_0 nabývá f všech hodnot $z \in \mathbb{C}$ s výjimkou nejvýše jedné.

Definice. Necht' f je funkce definovaná na $U(\infty, r)$ pro nějaké $r > 0$. Řekneme, že

- (i) f je **holomorfní v bodě ∞** ,
- (ii) f má v bodě ∞ **kořen násobnosti p** ,

pokud příslušnou vlastnost má funkce $g(z) = f(\frac{1}{z})$ v bodě 0. Je-li f holomorfní na $P(\infty, r)$ pro nějaké $r > 0$, pak říkáme, že f má v bodě ∞ **odstranitelnou singularitu (pól násobnosti p , podstatnou singularitu)**, jestliže příslušný typ singularity má funkce $g(z) = f(\frac{1}{z})$ v bodě 0.

Definice. Necht' f je holomorfní funkce v $P(a, R)$, kde $a \in \mathbb{C}$ a $R > 0$. Pak **reziduem funkce f v bodě a** rozumíme číslo

$$\operatorname{res}_a f = \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi_\rho} f,$$

kde $\rho \in (0, R)$ a φ_ρ je kladně orientovaná kružnice o středu a a poloměru ρ .

Poznámky.

- (1) Definice rezidua je korektní, protože hodnota uvedeného integrálu nezávisí na $\rho \in (0, R)$. To plyne snadno z Věty III.13, protože otevřený kruh, z něhož je vynechán jeden poloměr, je hvězdovitá množina.
- (2) Pokud f má v bodě a odstranitelnou singularitu, je $\operatorname{res}_a f = 0$; pokud f má v bodě a pól, je $\operatorname{res}_a f = a_{-1}$, kde a_{-1} je hodnota z Věty 2(ii).

Věta 3 (reziduová věta – první verze). *Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ je otevřená množina, $M \subset \Omega$ konečná množina a $\varphi : [a, b] \rightarrow \Omega \setminus M$ je uzavřená cesta. Předpokládejme, že pro Ω a φ platí Cauchyova věta, tj. $\int_{\varphi} g = 0$ pro každou funkci g holomorfní na Ω . Pak pro každou f holomorfní na $\Omega \setminus M$ takovou, že v každém bodě M má buď odstranitelnou singularitu nebo pól, platí*

$$\int_{\varphi} f = 2\pi i \sum_{a \in M} \operatorname{res}_a f \cdot \operatorname{ind}_{\varphi} a.$$

Poznámky.

- (1) Ve Větě 3 stačí předpokládat, že f je holomorfní na $\Omega \setminus M$. Toto silnější tvrzení používá výsledky oddílu IV.4 (viz Věta 13), nicméně ke konkrétním výpočtům se příliš nepoužívá.
- (2) Funkce, které jsou holomorfní až na izolovanou množinu pólů, se nazývají **meromorfní**. Podrobněji se jimi zabývá magisterská přednáška Komplexní analýza.

Věta 4 (některé metody výpočtu reziduí). *Nechť f a g jsou holomorfní funkce v nějakém prstencovém okolí bodu $a \in \mathbb{C}$.*

- (1) *Má-li funkce f v bodě a pól násobnosti p , pak*

$$\operatorname{res}_a f = \frac{1}{(p-1)!} \lim_{z \rightarrow a} (f(z)(z-a)^p)^{(p-1)}.$$

- (2) *Jsou-li f, g holomorfní v bodě a a g má v bodě a kořen násobnosti 1 (tj. $g(a) = 0$ a $g'(a) \neq 0$), pak $\operatorname{res}_a \frac{f}{g} = \frac{f(a)}{g'(a)}$.*
- (3) *Je-li f holomorfní v a a g má v a pól násobnosti 1, pak $\operatorname{res}_a(fg) = f(a) \cdot \operatorname{res}_a g$.*
- (4) *Je-li f holomorfní v bodě a a g má v bodě a pól násobnosti p , pak*

$$\operatorname{res}_a(fg) = \sum_{k=1}^p \frac{f^{(k-1)}(a)}{(k-1)!} b_{-k},$$

kde b_{-1}, \dots, b_{-p} jsou koeficienty z Věty 2(2).