Tři verze věty o derivaci složené funkce

Verze R – R Nechť g je ~~funkce~~ reálná funkce reálné proměnné, která má vlastní derivaci v bodě $a \in \mathbb{R}$. Označme $b := g(a)$. Nechť f je (reálná či komplexní) funkce reálné proměnné, která má vlastní derivaci v bodě $\underline{b}$. Pak funkce $f \circ g$ má vlastní derivaci v bodě $\underline{a}$ a platí

$$(f \circ g)'(a) = f'(b) \cdot g'(a)$$

VERZE R – C Nechť g je komplexní funkce reálné proměnné, která má vlastní derivaci v bodě $a \in \mathbb{R}$. Označme $b := g(a)$. Nechť f je komplexní funkce komplexní proměnné, která má v bodě $\underline{b}$ derivaci podle komplexní proměnné. Pak funkce $f \circ g$ má vlastní derivaci v bodě $\underline{a}$ a platí

$$(f \circ g)'(a) = f'(b) \cdot g'(a)$$

VERZE C – C Nechť g je komplexní funkce komplexní proměnné, která má v bodě $a \in \mathbb{C}$ derivaci podle komplexní proměnné. Označme $b := g(a)$. Nechť f je komplexní funkce komplexní proměnné, která má v bodě $\underline{b}$ derivaci podle komplexní proměnné. Pak funkce $f \circ g$ má v bodě $\underline{a}$ derivaci podle komplexní proměnné a platí

$$(f \circ g)'(a) = f'(b) \cdot g'(a)$$

Společný důkaz pro všech tři případy:

Definujme pomocnou funkci $F(y) = \begin{cases} \dfrac{f(y)-f(b)}{y-b}, & y \neq b \\ f'(b), & y = b \end{cases}$

Dle předpokladu platí $\lim\limits_{y\to b} F(y) = \lim\limits_{y\to b} \dfrac{f(y)-f(b)}{y-b} = f'(b) = F(b)$

$\Rightarrow$ F je spojitá v bodě b

Navíc $\dfrac{f(g(t))-f(g(a))}{t-a} = F(g(t)) \cdot \dfrac{g(t)-g(a)}{t-a}$

[$g(t) = g(a) \Rightarrow$ obě strany jsou 0

$g(t) \neq g(a) \Rightarrow F(g(t)) = \dfrac{f(g(t))-f(g(a))}{g(t)-g(a)}$, tedy

můžeme zkrátit a vyjde to]

Platí $\lim\limits_{t\to a} \dfrac{g(t)-g(a)}{t-a} = g'(a)$ dle předpokladu

$\lim\limits_{t\to a} F(g(t)) = f'(b)$, protože:

[$\lim\limits_{t\to a} g(t) = g(a) = b$, jelikož g je nutně spojitá v bodě a

F je spojitá v bodě b a $F(b) = f'(b)$]

lze použít věty o limitě složené funkce s podmínkou (S)

Tedy z věty o limitě součinu plyne

$$(f\circ g)'(a) = \lim_{t\to a} \frac{f(g(t))-f(g(a))}{t-a} = \lim_{t\to a} \underbrace{F(g(t))}_{\downarrow \, f'(b)} \cdot \underbrace{\frac{g(t)-g(a)}{t-a}}_{\downarrow \, g'(a)} = f'(b)\cdot g'(a)$$

┘