KOMPLEXNÍ ČÍSLA TVOŘÍ KOMUTATIVNÍ TĚLESO

(1) Pro $(x,y) \in \mathbb{C}$ označme $M(x,y) = \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}$.

Pak platí $M((x,y)+(a,b)) = M(x,y) + M(a,b)$

[to je zřejmé]

a také

$$M((x,y)\cdot(a,b)) = M(x,y)\cdot M(a,b)$$

[ověříme výpočtem:

$(x,y)\cdot(a,b) = (xa-yb, xb+ya)$, tedy

$$M((x,y)\cdot(a,b)) = \begin{pmatrix} xa-yb & xb+ya \\ -xb-ya, & xa-yb \end{pmatrix}$$

Přitom $M(x,y)\cdot M(a,b) = \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} xa-yb & xb+ya \\ -ya-xb & -yb+xa \end{pmatrix}$$

a vidíme, že to vyšlo stejně]

(2) Sčítání v $\mathbb{C}$ je komutativní a asociativní.
Násobení v $\mathbb{C}$ je asociativní a distributivní vůči sčítání.

[Všechny tyto vlastnosti má sčítání a násobení matic 2x2, prostřednictvím zobrazení M se to přenese do $\mathbb{C}$ – použije se (1) a prostota M.

Například: $M(x,y)\cdot(M(a,b)\cdot M(u,v)) = (M(x,y)\cdot M(a,b))\cdot M(u,v)$

vlastnost maticového násobení

$\overset{(1)}{=} M(x,y)\cdot M((a,b)\cdot(u,v))$

$\overset{(1)}{=} M((x,y)((a,b)\cdot(u,v)))$

$\overset{(1)}{=} M((x,y)\cdot(a,b))\cdot M(u,v)$

$= M(((x,y)\cdot(a,b))\cdot(u,v))$

Proto $M((x,y)((a,s)\cdot(r,u))) = M(((x,y)\cdot(a,s))\cdot(r,u))$

Protože M je prosté (inverzní zobrazení přiřadí matici prvek),

důsledkem $(x,y)\cdot((a,s)\cdot(r,u)) = ((x,y)\cdot(a,s))\cdot(r,u)$

To dokazuje asociativitu násobení. Ostatní vlastnosti se dokáží podobně. ⌋

③ Násobení v $\mathbb{C}$ je komutativní

⌈ověří se přímým výpočtem ⌋

④ $(0,0)$ je nulový prvek $\mathbb{C}$, $(1,0)$ je jednotkový prvek $\mathbb{C}$,
tj. $(0,0)+(x,y)=(x,y)$, $(1,0)\cdot(x,y)=(x,y)$

⌈Lze ověřit přímým výpočtem, nebo použitím zobrazení M:

$M(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ je nulová matice

$M(1,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ je jednotková matice

a víme, že přičtení nulové matice či vynásobení jednotkovou maticí výslednou matici nezmění. ⌋

⑤ Opačný prvek k (x,y) je $(-x,-y)$

⌈ověří se přímým výpočtem⌋

⑥ Je-li $(x,y) \neq (0,0)$, je inverzní prvek k (x,y) roven $\left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2}\right)$

⌈Buď se ověří přímým výpočtem, nebo se spočte inverzní matice k $\begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}$ a vyjde $\begin{pmatrix} \frac{x}{x^2+y^2} & \frac{-y}{x^2+y^2} \\ \frac{y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2} \end{pmatrix}$ ⌋