

ÚVOD DO FUNKCIONÁLNÍ ANALÝZY

PŘÍKLADY PRO POROZUMĚNÍ LÁTCE – ZS 2025/2026

PŘÍKLADY KE KAPITOLE IV

Příklad 1. Necht' $U \subset \mathbb{R}^d$ je otevřená množina a $K \subset U$ kompaktní množina. Ukažte, že existuje $g \in C^\infty(\mathbb{R})$, pro kterou platí $0 \leq g \leq 1$, $\text{spt } g$ je kompaktní podmnožina U a $g|_K = 1$.

Návod: Pokud U je otevřená koule, tvrzení odvoďte z Příkladu IV.2(4) z přednášky. V obecném případě s využitím kompaktnosti K ukažte, že existují $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k \in K$ a kladná čísla $r_1, \dots, r_k$ taková, že otevřené koule $U(\mathbf{x}_j, r_j)$ pokrývají K a uzavřené koule $\overline{U(\mathbf{x}_j, 2r_j)}$ jsou obsaženy v U . Na tyto dvojice aplikujte zmíněný Příklad IV.2(4), dostanete funkce $\varphi_1, \dots, \varphi_k$. Ukažte, že lze vzít $g = h_3 \circ (\varphi_1 + \dots + \varphi_k)$, kde h_3 je funkce z Příkladu IV.2(3).

Příklad 2. Necht' $B \subset \mathbb{R}^d$ je borelovská množina konečné míry. Necht' $p \in [1, \infty)$. Ukažte, že existuje posloupnost (g_n) v $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, která konverguje k χ_B v $L^p(\mathbb{R}^n)$.

Návod: Necht' $\varepsilon > 0$. Z regularity Lebesgueovy míry existuje kompaktní množina K a otevřená množina U , že $K \subset B \subset U$ a $\lambda^d(U \setminus K) < \varepsilon$. Na dvojici K a U použijte předchozí příklad.

Příklad 3. Dokažte hustotu $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ v $L^p(\mathbb{R}^d)$ pro $p \in [1, \infty)$ (tj. Důsledek IV.7 z přednášky) bez použití konvoluce.

Návod: Použijte hustotu jednoduchých funkcí a předchozí příklad.