

ÚVOD DO FUNKCIONÁLNÍ ANALÝZY

PŘÍKLADY PRO POROZUMĚNÍ LÁTCE – ZS 2025/2026

PŘÍKLADY KE KAPITOLE II

K ODDÍLU II.1 – SUBLINEÁRNÍ FUNKCIONÁLY, PSEUDONORMY, HAHN-BANACHOVA VĚTA

Příklad 1. Nechtě X je reálný vektorový prostor.

- (1) Nechtě $f_1, \dots, f_n$ jsou lineární funkcionály na X . Ukažte, že $\max\{f_1, \dots, f_n\}$ je sublineární funkcionál na X .
- (2) Nechtě p je sublineární funkcionál na X . Ukažte, že pro každé $x \in X$ platí

$$p(x) = \max\{f(x); f \text{ je lineární funkcionál na } X, f \leq p\}.$$

Návod: (2) Použijte algebraickou Hahn-Banachovu větu, tj. Větu II.2 z přednášky.

Příklad 2. Nechtě X je vektorový prostor nad $\mathbb{F}$.

- (1) Nechtě $f_1, \dots, f_n$ jsou lineární funkcionály na X . Ukažte, že $\max\{|f_1|, \dots, |f_n|\}$ je pseudonorma na X .
- (2) Nechtě p je pseudonorma na X . Ukažte, že pro každé $x \in X$ platí

$$p(x) = \max\{|f(x)|; f \text{ je lineární funkcionál na } X, |f| \leq p\}.$$

Návod: (2) Použijte Důsledek II.5 z přednášky.

Příklad 3. Nechtě X je normovaný lineární prostor a $A \subset X^*$ je omezená množina.

- (1) Ukažte, že

$$p_A(x) = \sup\{\operatorname{Re} f(x); f \in A\}, \quad x \in X,$$

je spojitý sublineární funkcionál na X .

- (2) Ukažte, že

$$q_A(x) = \sup\{|f(x)|; f \in A\}, \quad x \in X,$$

je spojitá pseudonorma na X .

- (3) Nechtě 0 je vnitřním bodem množiny A . Ukažte, že q_A je ekvivalentní norma na X .

Návod: (1,2) Spojitost ukažte tak, že ukážete lipschitzovskost.

Příklad 4. Nechtě X je normovaný lineární prostor a U otevřená konvexní množina obsahující 0 . Ukažte, že existuje právě jeden sublineární funkcionál p na X , pro který platí $U = \{x \in X; p(x) < 1\}$. Ukažte, že p je spojitý.

Návod: Uvažte Minkowského funkcionál množiny U .

Příklad 5. Dokažte Větu II.6 z přednášky (tj. Hahn-Banachovu větu o rozšiřování spojitých lineárních funkcionálů) pro reálné separabilní normované prostory bez použití Zornova lemmatu.

Návod: Použijte existenci spočetné husté množiny, Lemma II.3 a Větu I.18.

Příklad 6. Dokažte Větu II.6 z přednášky pro komplexní separabilní normované prostory bez použití Zornova lemmatu.

Návod: Použijte předchozí příklad na reálnou část funkcionálu a Tvzení I.50(d) z přednášky.

Příklad 7. Nechť X je normovaný lineární prostor, Y jeho podprostor a $T : Y \rightarrow \ell^\infty(\Gamma)$ spojitý lineární operátor. Ukažte, že existuje lineární operátor $\tilde{T} : X \rightarrow \ell^\infty(\Gamma)$, který rozšiřuje T a pro něj platí $\|\tilde{T}\| = \|T\|$.

Návod: Použijte Hahn-Banachovu větu na funkcionály $x \mapsto Tx(\gamma)$ pro každé $\gamma \in \Gamma$.

Příklad 8. Nechť X je normovaný lineární prostor, Y jeho podprostor a Z normovaný prostor konečné dimenze. Ukažte, že každý operátor $T \in L(Y, Z)$ lze rozšířit na operátor $\tilde{T} \in L(X, Z)$.

Návod: Použijte předchozí příklad a ekvivalenci norem na prostorech konečné dimenze.

Příklad 9. Nechť X je normovaný lineární prostor nad $\mathbb{F}$ a p je spojitý sublineární funkcionál na X . Nechť f je lineární funkcionál na X splňující $\operatorname{Re} f \leq p$. Ukažte, že f je spojitý.

Návod: Ukažte, že $\operatorname{Re} f$ je omezená na B_X . Odtud odvoďte, že $\operatorname{Re} f$ je spojitý, a tedy i f je spojitý (například s využitím Tvzení I.50).

Příklad 10. Ukažte, že na prostoru $\ell^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ existuje Banachova limita, tj. spojitý lineární funkcionál L s vlastnostmi:

- $L((x_n)) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, pokud limita existuje.
- Pokud $x_n \leq y_n$ pro všechna n , pak $L((x_n)) \leq L((y_n))$.
- $L(x_1, x_2, x_3, \dots) = L(x_2, x_3, x_4, \dots)$ pro každé $(x_n) \in \ell^\infty$.

Návod: Použijte Větu II.2 z přednášky na funkcionál $(x_n) \mapsto \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ na c (tj. na podprostoru tvořeném konvergentními posloupnostmi) a sublineární funkcionál $p((x_n)) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}(x_1 + \dots + x_n)$.

Příklad 11. Ukažte, že Banachova limita z předchozího příkladu nemůže splňovat $L((x_n y_n)) = L(x_n)L(y_n)$ pro každou dvojici $(x_n), (y_n) \in \ell^\infty$.

Návod: Ukažte, že nutně $L(1, 0, 1, 0, \dots) = \frac{1}{2}$.

Příklad 12. Nechť H je Hilbertův prostor a $Y \subset H$ jeho podprostor. Ukažte, že pro každý funkcionál $f \in Y^*$ existuje právě jeden funkcionál $g \in H^*$ stejné normy, který rozšiřuje f .

Návod: Ukažte, že nutně $g = 0$ na $Y^\perp$.

Příklad 13. Najděte podprostor $Y \subset \ell^1$ a $f \in Y^*$, pro který existují dvě různá rozšíření na ℓ^1 , která mají stejnou normu.

Příklad 14. Nechť X je normovaný lineární prostor a $A \subset X$. Ukažte, že $(A^\perp)_\perp = \overline{\operatorname{span}} A$. (Zde $A^\perp = \{f \in X^*; f(x) = 0 \text{ pro } x \in A\}$ a analogicky pro $B \subset X^*$ je $B_\perp = \{x \in X; f(x) = 0 \text{ pro } f \in B\}$, viz oddíl III.1.)

Návod: Použijte Důsledek II.10 z přednášky.

Příklad 15. Nechť X je normovaný lineární prostor. Pro $A \subset X$ a $B \subset X^*$ položme

$$A^\triangleright = \{f \in X^*; \operatorname{Re} f(x) \leq 1 \text{ pro } x \in A\},$$

$$B_\triangleright = \{x \in X; \operatorname{Re} f(x) \leq 1 \text{ pro } f \in B\}.$$

Ukažte, že pro $A \subset X$ platí $(A^\triangleright)_\triangleright = \overline{\operatorname{conv}(A \cup \{0\})}$.

Návod: Rozmyslete si, že inkluze $\supset$ je snadná. Pro důkaz opačné inkluze použijte Větu II.11(2) pro oddělení bodu od $\operatorname{conv}(A \cup \{0\})$.

Příklad 16. Nechť X je normovaný lineární prostor. Pro $A \subset X$ a $B \subset X^*$ položme

$$A^\circ = \{f \in X^*; |f(x)| \leq 1 \text{ pro } x \in A\},$$

$$B_\circ = \{x \in X; |f(x)| \leq 1 \text{ pro } f \in B\}.$$

Ukažte, že pro $A \subset X$ platí $(A^\circ)_\circ = \overline{\operatorname{aco} A}$, kde aco označuje absolutně konvexní obal, tj. nejmenší absolutně konvexní množinu, která obsahuje A .

Návod: Rozmyslete si, že inkluze $\supset$ je snadná. Pro důkaz opačné inkluze použijte Větu II.11(2) pro oddělení bodu od $\overline{\operatorname{aco} A}$. Podobnou metodou jako v Důkazu Větičky II.4 ukažte, že lze reálnou část nahradit absolutní hodnotou.

Příklad 17. Nechť X je normovaný lineární prostor.

- (1) Ukažte, že, je-li X^* separabilní, je i X separabilní.
- (2) Nechť X je separabilní. Musí být i X^* separabilní?

Návod: (1) Nechť $\{f_n; n \in \mathbb{N}\}$ je hustá v X^* a neobsahuje nulu. Pro každé n nechť $x_n \in X$ je takové, že $f_n(x_n) \neq 0$. Pomocí předchozího příkladu ukažte, že $\overline{\operatorname{span}}\{x_n; n \in \mathbb{N}\} = X$, a z toho odvoďte separabilitu. (2) Použijte konkrétní podobu duálních prostorů z oddílu II.3 z přednášky.

Příklad 18. Nechť $X = c_0$ nebo $X = \ell^p$ pro nějaké $p \in [1, \infty)$ (uvažujeme prostory nad $\mathbb{R}$). Nechť $\mathbf{x} = (x_n) \in X$ je prvek, jehož všechny souřadnice jsou kladné, a $\mathbf{y} = (\frac{x_n}{n}) \in X$. Položme

$$A = \{\mathbf{z} = (z_n) \in X; \forall n \in \mathbb{N} : z_n \geq 0\}, \quad B = \{-\mathbf{x} + t\mathbf{y}; t \in \mathbb{R}\}.$$

Ukažte, že A a B jsou disjunktní uzavřené konvexní podmnožiny X , které není možné oddělit nenulovým prvkem X^* .

Návod: Postupujte sporem: Nechť $f \in X^* \setminus \{0\}$ splňuje $\sup f(B) \leq \inf f(A)$. Ukažte, že nutně $f \geq 0$ na A a $\inf f(A) = 0$. Funkcionál f lze reprezentovat příslušnou posloupností (prvkem ℓ^1 resp. ℓ^q , kde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, viz oddíl II.3), ukažte, že všechny prvky této posloupnosti musí být nezáporné. Z předpokladu $\inf f(B) \leq 0$ odvoďte $f(\mathbf{y}) = 0$, a odtud $f = 0$, což dává spor.

K ODDÍLU II.2 – VNOŘENÍ DO DRUHÉHO DUÁLU A REFLEXIVITA

Příklad 19. Nechť X je komplexní normovaný lineární prostor. Připomeňme, že X_R je jeho reálná verze a že zobrazení $\phi : (X^*)_R \rightarrow (X_R)^*$ definované předpisem $\phi(f)(x) = \operatorname{Re} f(x)$ ($f \in (X^*)_R$, $x \in X_R$) je dle Tvzení I.50 z přednášky lineární izometrie mezi reálnými Banachovými prostory $(X^*)_R$ a $(X_R)^*$. Pro $F \in (X^{**})_R$ definujme zobrazení $\psi(F) : (X_R)^* \rightarrow \mathbb{R}$ předpisem $\psi(F)(g) = \operatorname{Re} F(\phi^{-1}(g))$ pro $g \in (X_R)^*$.

- (1) Ukažte, že ψ je lineární izometrie $(X^{**})_R$ na $(X_R)^{**}$.
- (2) Ukažte, že $\psi \circ \varkappa_X = \varkappa_{X_R}$ (kde $\varkappa_X$ je kanonické vnoření X do X^{**} uvažované jako zobrazení mezi reálnými prostory X_R a $(X^{**})_R$).
- (3) Ukažte, že X je reflexivní, právě když X_R je reflexivní.

Příklad 20. Necht' K je nekonečný kompaktní metrický prostor.

- (1) Ukažte, že v K existuje prostá konvergentní posloupnost.
- (2) Ukažte, že pro každé $x \in K$ vzorec $\delta_x(f) = f(x)$, $f \in \mathcal{C}(K)$, definuje spojitý lineární funkcionál normy 1.
- (3) Ukažte, že pro $x_1, \dots, x_n \in K$ různé a $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{F}$ platí

$$\left\| \sum_{j=1}^n c_j \delta_{x_j} \right\| = \sum_{j=1}^n |c_j|.$$

- (4) Necht' (x_n) je posloupnost z bodu (1) s limitou $x \in K$. Ukažte, že bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat $x \notin \{x_1, x_2, \dots\}$. V takovém případě uvažme

$$Y = \text{span}\{\delta_x, \delta_{x_1}, \delta_{x_2}, \dots\} \subset \mathcal{C}(K)^*.$$

Ukažte, že prvky $\delta_x, \delta_{x_1}, \delta_{x_2}, \dots$ jsou lineárně nezávislé a že funkcionál $\varphi : Y \rightarrow \mathbb{F}$, který prvku Y přiřadí jeho koeficient u δ_x , je spojitý na Y (a má normu 1).

- (5) Ukažte, že žádné rozšíření φ na $\mathcal{C}(K)$ (tj. na prvek $\mathcal{C}(K)^{**}$) nepatří do $\mathcal{K}(\mathcal{C}(K))$ a z toho odvoďte, že $\mathcal{C}(K)$ není reflexivní.

Návod: (3) Pro důkaz nerovnosti $\geq$ využijte Lemma II.22 z přednášky. Necht' d je metrika na K . Najděte $r > 0$, že $B_d(x_j, r)$, $j = 1, \dots, n$ jsou disjunktní, a s využitím bodu (b) lemmatu najděte funkci $f \in \mathcal{C}(K)$ takovou, že $\|f\|_\infty = 1$ a $c_j f(x_j) = |c_j|$ pro $j = 1, \dots, n$. (4) Lineární nezávislost odvoďte z (3), stejně jako normu φ . (5) Necht' rozšíření je tvaru $\mathcal{K}(f)$. Spočítejte hodnoty f v bodech x a x_k , $k \in \mathbb{N}$, a ukažte, že f nemůže být spojitá.

Příklad 21. Necht' K je nekonečný kompaktní metrický prostor, posloupnost (x_n) a x necht' jsou jako v předchozím příkladu. Ukažte, že funkcionál $\varphi = \delta_x - \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{2^n} \delta_{x_n}$ má normu 2 a své normy nenabývá. Odtud znovu odvoďte, že $\mathcal{C}(K)$ není reflexivní.

Návod: Pro výpočet normy použijte bod (3) předchozího příkladu. Předpokládejme, že norma se nabývá v nějaké funkci $f \in B_{\mathcal{C}(K)}$. Ukažte, že f nemůže být spojitá v bodě x .

K ODDÍLU II.3 – REPREZENTACE DUÁLNÍCH PROSTORŮ

Příklad 22. Ukažte, že c_0^{**} je izometrický ℓ^∞ a že kanonickému vnoření odpovídá identické zobrazení c_0 do ℓ^∞ .

Návod: Použijte Větu II.17.

Příklad 23. Necht' c je prostor konvergentních posloupností z Příkladu I.6. Ukažte, že c^* je izometrický ℓ^1 a příslušnou izometrii popište.

Návod: Uvažte zobrazení $T : \ell^1(\mathbb{N} \cup \{\infty\}) \rightarrow c^*$ definované předpisem $T(f)((x_k)) = \sum_{k=1}^\infty f(k)x_k + f(\infty) \cdot \lim_{k \rightarrow \infty} x_k$.

Příklad 24. Necht' Γ je nespočetná množina. Pro každou z níže uvedených σ -algeber Σ a měr μ popište prostory $L^1(\Gamma, \Sigma, \mu)$, $L^\infty(\Gamma, \Sigma, \mu)$ a $(L^1(\Gamma, \Sigma, \mu))^*$. V kterých případech je zobrazení $\Phi : L^\infty(\Gamma, \Sigma, \mu) \rightarrow (L^1(\Gamma, \Sigma, \mu))^*$ z Věty II.19 z přednášky izometrie a v kterých případech je na?

- (1) Σ jsou všechny podmnožiny Γ , μ je počítací míra (tj. pro konečné množiny dává počet prvků, pro nekonečné množiny dává ∞).
- (2) $\Sigma = \{A \subset \Gamma; A \text{ je spočetná nebo } \Gamma \setminus A \text{ je spočetná}\}$, μ je zúžení počítací míry na Σ .
- (3) Σ je jako v bodě (2), $\mu(A) = 0$ pro spočetnou A a $\mu(A) = \infty$, pokud $\Gamma \setminus A$ je spočetná.
- (4) Σ je jako v bodě (2), $\mu(A) = 0$ pro spočetnou A a $\mu(A) = 1$, pokud $\Gamma \setminus A$ je spočetná.
- (5) Σ jsou všechny podmnožiny Γ , $\mu(\emptyset) = 0$ a $\mu(A) = \infty$ pro $A \neq \emptyset$.

Příklad 25. Necht' (Ω, Σ, μ) je prostor s mírou. Uvažme zobrazení $\Phi : L^\infty(\Gamma, \Sigma, \mu) \rightarrow (L^1(\Gamma, \Sigma, \mu))^*$ z Věty II.19.

- (1) Ukažte, že Φ je izometrie do, právě když platí podmínka

$$\forall A \in \Sigma, \mu(A) > 0 \exists B \in \Sigma : B \subset A \text{ \& } 0 < \mu(B) < \infty.$$

(Takové míře se říká polokonečná.)

- (2) Ukažte na protipříkladu, že ani pro případ polokonečné míry nemusí být Φ na.
- (3) Předpokládejme, že existuje systém $(\Omega_j)_{j \in J}$ s vlastnostmi
 - (a) Množiny Ω_j jsou po dvou disjunktní a $\bigcup_{j \in J} \Omega_j = \Omega$;
 - (b) pro každé $j \in J$ platí $\Omega_j \in \Sigma$ a $0 < \mu(\Omega_j) < \infty$;
 - (c) pro $A \subset \Omega$ platí $A \in \Sigma \Leftrightarrow \forall j \in J : A \cap \Omega_j \in \Sigma$.

Ukažte, že Φ je izometrie na.

Návod: (1) Použijte metodu příslušné části důkazu Věty II.19. (2) Použijte vhodný bod předchozího příkladu. (3) Modifikujte důkaz pro σ -konečný případ.

Příklad 26. Uvažme zobrazení $\Psi : \mathcal{B}_b([0, 1]) \rightarrow \mathcal{M}([0, 1])^*$ (viz Příklad I.8) a $\Upsilon : \ell^\infty([0, 1]) \rightarrow \mathcal{M}([0, 1])^*$ daná předpisem

$$\Psi(f)(\mu) = \int_{[0,1]} f d\mu, \quad f \in \mathcal{B}_b([0, 1]), \mu \in \mathcal{M}([0, 1]);$$

$$\Upsilon(f)(\mu) = \sum_{t \in [0,1]} f(t) \cdot \mu(\{t\}), \quad f \in \ell^\infty([0, 1]), \mu \in \mathcal{M}([0, 1]).$$

- (1) Ukažte, že Ψ je lineární izometrie $\mathcal{B}_b([0, 1])$ do $\mathcal{M}([0, 1])^*$.
- (2) Ukažte, že zúžení Ψ na $\mathcal{C}([0, 1])$ odpovídá kanonickému vnoření $\mathcal{C}([0, 1])$ do druhého duálu (při identifikaci $\mathcal{C}([0, 1])^*$ s $\mathcal{M}([0, 1])$ dle Věty II.23).
- (3) Ukažte, že Υ je lineární izometrie $\ell^\infty([0, 1])$ do $\mathcal{M}([0, 1])^*$.
- (4) Ukažte, že $\ell_c^\infty([0, 1]) \subset \mathcal{B}_b([0, 1])$ (viz Příklad I.7) a že pro $f \in \ell_c^\infty([0, 1])$ je $\Psi(f) = \Upsilon(f)$.
- (5) Ukažte, že $\Psi(1)$ není v oboru hodnot Υ .
- (6) Ukažte, že $\Upsilon(1)$ není v oboru hodnot Ψ .
- (7) Ukažte, že $(\Psi(\mathcal{B}_b([0, 1])))_\perp = \{0\}$ a popište $(\Upsilon(\ell^\infty([0, 1])))_\perp$.

Návod: (5) Uvažte hodnotu na Lebesgueově míře. (6) Předpokládejme, že $\Psi(f) = \Upsilon(1)$. Aplikací na Diracovy míry odvoďte, že nutně $f = 1$. Následně ukažte, že $\Psi(1) \neq \Upsilon(1)$. (7) Pro první rovnost použijte výsledek (2).

Příklad 27. Necht' (X_n) je posloupnost Banachových prostorů. (Níže používáme značení z Příkladů I.19 a I.20.)

- (1) Ukažte, že $((\oplus_{n \in \mathbb{N}} X_n)_{c_0})^*$ je izometrický $(\oplus_{n \in \mathbb{N}} X_n^*)_{\ell^1}$ a popište příslušnou izometrii.
- (2) Necht' $p \in [1, \infty)$ a $q \in (1, \infty]$ jsou taková, že $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Ukažte, že $((\oplus_{n \in \mathbb{N}} X_n)_{\ell^p})^*$ je izometrický $(\oplus_{n \in \mathbb{N}} X_n^*)_{\ell^q}$ a popište příslušnou izometrii.
- (3) Necht' $p \in (1, \infty)$. Ukažte, že prostor $(\oplus_{n \in \mathbb{N}} X_n)_{\ell^p}$ je reflexivní, právě když každý z prostorů X_n je reflexivní.

Návod: Použijte metodu důkazu Věty II.17 a Důsledku II.18 z přednášky.

Příklad 28.

- (1) Necht' $(x_n) \in \ell^1$. Ukažte, že funkcionál na c_0 reprezentovaný posloupností (x_n) (ve smyslu Věty II.17 z přednášky) nabývá své normy, právě když jen konečně mnoho jeho souřadnic je nenulových.
- (2) Necht' $(x_n) \in \ell^\infty$. Ukažte, že funkcionál na ℓ^1 reprezentovaný posloupností (x_n) (ve smyslu Věty II.17 z přednášky) nabývá své normy, právě když existuje $m \in \mathbb{N}$, pro které $|x_m| = \|(x_n)\|_\infty$.

Příklad 29. Necht' μ je σ -konečná míra a $f \in L^\infty(\mu)$. Ukažte, že funkcionál na $L^1(\mu)$ reprezentovaný funkcí f (ve smyslu Věty II.19 z přednášky) nabývá své normy, právě když množina $\{x \in \Omega; |f(x)| = \|f\|_\infty\}$ má kladnou míru.

Příklad 30. Necht' K je kompaktní metrický prostor a $\mu \in \mathcal{M}(K, \mathbb{R})$. Ukažte, že funkcionál na $\mathcal{C}(K, \mathbb{R})$ reprezentovaný mírou μ (ve smyslu Věty II.23 z přednášky) nabývá své normy, právě když existují disjunktní uzavřené množiny $F_1, F_2 \subset K$ takové, že μ^+ je nesená F_1 a μ^- je nesená F_2 (tj. $\mu^+(K \setminus F_1) = 0$ a $\mu^-(K \setminus F_2) = 0$).

Návod: Pro implikaci $\Leftarrow$ použijte Lemma II.22(b) z přednášky. Pro opačnou implikaci uvažte f , v níž se norma nabývá a ukažte, že lze vzít $F_1 = f^{-1}(1)$ a $F_2 = f^{-1}(-1)$.

K ODDÍLU II.4 – SLABÁ A SLABÁ* KONVERGENCE

Příklad 31. Necht' X a Y jsou normované lineární prostory a $T \in L(X, Y)$. Ukažte, že

$$x_n \xrightarrow{w} x \text{ v } X \implies T(x_n) \xrightarrow{w} T(x) \text{ v } Y.$$

Návod: Je-li $f \in Y^$, pak $f \circ T \in X^*$.*

Příklad 32. Necht' X je komplexní normovaný lineární prostor a X_R jeho reálná verze. Dokažte, že

$$x_n \xrightarrow{w} x \text{ v } X \iff x_n \xrightarrow{w} x \text{ v } X_R.$$

Návod: Použijte Tvzení I.50(d,e).

Příklad 33. Necht' X je normovaný lineární prostor a $x_n \xrightarrow{w} x$. Ukažte, že existuje posloupnost (y_n) , která splňuje

- $y_n \in \text{conv}\{x_k; k \geq n\}$ pro $n \in \mathbb{N}$;
- $y_n \rightarrow x$.

Návod: Z Tvzení II.26 plyne, že $x \in \overline{\text{conv}\{x_k; k \geq n\}}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$.

Příklad 34. Necht' X je Hilbertův prostor a (e_n) je ortonormální posloupnost v X . Ukažte, že posloupnost (e_n) konverguje slabě k nule.

Návod: Použijte reprezentaci duálu Hilbertova prostoru (Věta II.15) a Besselovu nerovnost (Věta I.38).

Příklad 35. Necht' $X = c_0$ nebo $X = \ell^p$, kde $p \in (1, \infty)$. Uka'zte, že posloupnost (e^n) kanonických jednotkových vektorů slabě konverguje k nule.

Návod: Použijte reprezentaci duálu z Věty II.17.

Příklad 36. Necht' $X = \ell^\infty$. Uka'zte, že posloupnost (e^n) kanonických jednotkových vektorů slabě konverguje k nule.

Návod: Použijte předchozí příklad a Tvzení II.24.

Příklad 37. Necht' $X = c_0$. Ztotožněme $X^* = \ell^1$ podle Věty II.17.

- (1) Uka'zte, že posloupnost (e^n) kanonických jednotkových vektorů v X^* slabě* konverguje k nule, ale nemá slabou limitu.
- (2) Uka'zte, že neexistuje posloupnost konvexních kombinací prvků e^n , která silně konverguje k nule, a tedy analogie Tvzení II.26 pro slabou* konvergenci neplatí.

*Návod: (1) První tvrzení doka'zte s použitím reprezentace z Věty II.17. Dále, dle téže věty lze ztotožnit $X^{**} = \ell^\infty$ a tento prostor obsahuje posloupnost konstantně rovnou jedné. (2) Každá konvexní kombinace kanonických vektorů má normu 1.*

Příklad 38. Necht' $X = C([0, 1])$.

- (1) Necht' (f_n) je posloupnost v X a $f \in X$. Uka'zte, že

$$f_n \xrightarrow{w} f \Leftrightarrow (f_n) \text{ je omezená a } \forall t \in [0, 1]: f_n(t) \rightarrow f(t).$$

- (2) Najděte posloupnost (f_n) v X , bodově konverguje k nule, ale není omezená. Z toho odvoďte, že v bodě (1) nelze škrtnout podmínku omezenosti.

Návod: (1) Pro implikaci $\Rightarrow$ použijte Důsledek II.30. Pro implikaci $\Leftarrow$ použijte Větu II.23 a Lebesgueovu větu o záměně limity a integrálu.

Příklad 39. Necht' $X = (c_{00}, \|\cdot\|_p)$, kde $p \in [1, \infty]$.

- (1) Uka'zte, že X je neúplný normovaný lineární prostor, a popište jeho zúplnění.
- (2) Popište reprezentaci X^* jako prostoru posloupností.
- (3) Necht' (e_n) je posloupnost kanonických jednotkových vektorů v X^* (reprezentují souřadnicové funkcionály). Uka'zte, že pro každou číselnou posloupnost (c_n) platí $c_n e_n \xrightarrow{w^*} 0$ v X^* .
- (4) Z předchozího bodu odvoďte, že Důsledek II.30(b) neplatí pro neúplné prostory X .

Návod: (2) Duály k X a k jeho zúplnění splývají (viz Tvzení I.15).

Příklad 40. Necht' (a_n) je číselná posloupnost.

- (1) Necht' $p \in [1, \infty)$. Přepokládejme, že pro každé $(x_n) \in \ell^p$ řada $\sum_{k=1}^\infty a_k x_k$ konverguje. Uka'zte, že $(a_n) \in \ell^q$, kde $q \in (1, \infty]$ splňuje $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.
- (2) Přepokládejme, že pro každé $(x_n) \in c_0$ řada $\sum_{k=1}^\infty a_k x_k$ konverguje. Uka'zte, že $(a_n) \in \ell^1$.

Návod: Aplikujte princip stejnoměrné omezenosti na posloupnost (f_n) , kde $f_n((x_k)) = \sum_{k=1}^n a_k x_k$.

Příklad 41. Necht' H je Hilbertův prostor. Uka'zte, že pro posloupnost (x_n) v H a $x \in H$ platí

$$x_n \rightarrow x \iff \|x_n\| \rightarrow \|x\| \text{ \& } x_n \xrightarrow{w} x.$$

Návod: Pro implikaci $\Leftarrow$ z podmínek na pravé straně odvoďte $\langle x_n - x, x_n - x \rangle \rightarrow 0$.

Příklad 42. Necht' $2 \leq p < \infty$ a $X = L^p(\mu)$ (reálný případ). Ukažte, že pro posloupnost (f_n) v X a $f \in X$ platí

$$f_n \rightarrow f \iff \|f_n\| \rightarrow \|f\| \text{ \& } f_n \xrightarrow{w} f.$$

Návod: Implikace $\Rightarrow$ je snadná, opačnou implikaci lze dokázat ve dvou krocích. Jako první krok ukažte, že existuje $A > 0$, že pro každé $t \in \mathbb{R}$ platí $|1+t|^p \geq 1+pt+At^p$ (pomocí vyšetření průběhu funkce $\frac{|1+t|^p-1-pt}{|t|^p}$ a čitatele tohoto zlomku). Jako druhý krok nerovnost aplikujte pro $t = \frac{f_n(x)-f(x)}{f(x)}$, vynásobte $|f|^p$ a zintegrujte. Použijte předpoklady a odvoďte závěr.

Příklad 43. Necht' $1 < p < 2$ a $X = L^p(\mu)$ (reálný případ). Ukažte, že pro posloupnost (f_n) v X a $f \in X$ platí

$$f_n \rightarrow f \iff \|f_n\| \rightarrow \|f\| \text{ \& } f_n \xrightarrow{w} f.$$

Návod: Implikace $\Rightarrow$ je snadná, opačnou implikaci lze dokázat ve třech krocích. Jako první krok ukažte, že existuje $A > 0$, že pro každé $t \in \mathbb{R}$ platí $|1+t|^p \geq 1+pt+A \min\{|t|^2, |t|^p\}$ (analogicky jako v předchozím příkladu). Druhý krok je stejný jako v přechodím příkladu, jen vyjde $\int_{\|f_n-f\| \geq \|f\|} |f_n-f|^p + \int_{\|f_n-f\| < \|f\|} |f_n-f|^2 |f|^{p-2} \rightarrow 0$. Třetí krok spočívá v postřehu, že $\int_{\|f_n-f\| < \|f\|} |f_n-f|^p \leq \int_{\|f_n-f\| < \|f\|} |f_n-f| |f|^{p-1}$ a následném použití Cauchy-Schwarzovy nerovnosti.

Příklad 44. Ukažte, že tvrzení z předchozích dvou příkladů platí i v komplexním případě.

Návod: Necht' $X = L^p(\Omega, \Sigma, \mu; \mathbb{C})$. Dle Příkladu 32 stačí tvrzení dokázat pro $X_{\mathbb{R}}$. Ukažte, že $X_{\mathbb{R}}$ je izomorfní $L^p(\Omega', \Sigma', \mu'; \mathbb{R})$, kde $\Omega' = \Omega \times \{0, 1\}$ a Σ' a μ' jsou definovány přirozeným způsobem.

Příklad 45. Ukažte, že v prostoru ℓ^1 splývá slabá a normová konvergence posloupností (tj. ℓ^1 má **Schurovu vlastnost**).

Návod: Postupujte sporem: Pokud ne, pak v ℓ^1 existuje posloupnost $(\mathbf{x}_k)$, která slabě konverguje k nule a přitom existuje takové $c > 0$, že $\|\mathbf{x}_k\| > c$ pro každé $k \in \mathbb{N}$. Protože $(\mathbf{x}_k)$ je omezená, bez újmy na obecnosti $\|\mathbf{x}_k\| = 1$ pro každé k . Ze slabé konvergence plyne konvergence na každé souřadnici. Pomocí matematické indukce zkonstruujte rostoucí posloupnosti přirozených čísel (k_j) a (m_j) , že $\sum_{l=m_j+1}^{m_{j+1}} |x_{k_j}(l)| > \frac{3}{4}$. Následně najděte $\varphi \in \ell^\infty = (\ell^1)^*$, aby $|\varphi(x_{k_j})| > \frac{1}{2}$ pro každé j a z toho odvoďte spor.

Příklad 46. Ukažte, že prostory c_0 , ℓ^p pro $p \in (1, \infty]$ a $\mathcal{C}([0, 1])$ nemají Schurovu vlastnost.

Návod: V každém z těchto prostorů najděte posloupnost na jednotkové sféře, která slabě konverguje k nule. Pro $\mathcal{C}([0, 1])$ využijte Příklad 38(1).

Příklad 47. Ukažte, že nekonečnědimensionální Hilbertův prostor nemá Schurovu vlastnost.

Návod: Použijte Příklad 34.

Příklad 48. Ukažte, že prostor $L^1([0, 1])$ nemá Schurovu vlastnost.

Návod: Necht' $T : L^2([0, 1]) \rightarrow L^1([0, 1])$ je identita. Uvažte ON bázi (f_n) prostoru $L^2([0, 1])$ známou z teorie Fourierových řad a uvažte posloupnost (Tf_n) .

Příklad 49. Necht' X je reflexivní prostor nekonečné dimenze. Ukažte, že X nemá Schurovu vlastnost.

Návod: Kdyby měl, pak z Věty II.34 plyne, že B_X je kompaktní.