

ÚVOD DO FUNKCIONÁLNÍ ANALÝZY

PŘÍKLADY PRO POROZUMĚNÍ LÁTCE – ZS 2025/2026

PŘÍKLADY KE KAPITOLE I

K ODDÍLU I.1 – ZÁKLADNÍ POJMY, NORMY, NORMOVANÉ PROSTORY

Příklad 1. Nechť X je reálný vektorový prostor a $\|\cdot\| : X \rightarrow [0, \infty)$ funkce splňující

- (i) $\|x\| = 0$ právě když $x = \mathbf{0}$.
- (ii) $\|\lambda x\| = \lambda \cdot \|x\|$ pro $\lambda > 0$.
- (iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Ukažte, že $\|\cdot\|$ je norma, právě když pro každé $x \in X$ je $\|-x\| = \|x\|$.

Příklad 2. Nechť X je komplexní vektorový prostor a $\|\cdot\| : X \rightarrow [0, \infty)$ funkce splňující

- (i) $\|x\| = 0$ právě když $x = \mathbf{0}$.
- (ii) $\|\lambda x\| = \lambda \cdot \|x\|$ pro $\lambda > 0$.
- (iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

- (1) Ukažte, že $\|\cdot\|$ je norma, právě když pro každé $x \in X$ a každou komplexní jednotku α platí $\|\alpha x\| \leq \|x\|$.
- (2) Ukažte na protipříkladu, že $\|\cdot\|$ nemusí být norma, pokud splňuje $\|ix\| = \|x\|$ pro každé $x \in X$.

Příklad 3. Nechť X je normovaný lineární prostor a $A \subset X$ je konvexní množina.

- (1) Nechť $x \in \text{int } A$ a $y \in A$. Ukažte, že úsečka $[x, y)$ patří do $\text{int } A$.
- (2) Ukažte, že $\text{int } A$ je konvexní množina.
- (3) Ukažte, že $\overline{A}$ je konvexní množina.

Příklad 4. Nechť X je normovaný lineární prostor a $Y \subset X$ je jeho vektorový podprostor.

- (1) Ukažte, že $\overline{Y}$ je také vektorový podprostor X .
- (2) Nechť Y má vnitřní bod. Ukažte, že $Y = X$.

Příklad 5. Nechť X je normovaný lineární prostor a $A \subset X$ je jeho podmnožina. Označme

- $\text{co } A$ konvexní obal A , tj. nejmenší konvexní množinu obsahující A , neboli průnik všech konvexních podmnožin X obsahujících A ;
- $\overline{\text{co } A}$ uzavřený konvexní obal A , tj. nejmenší uzavřenou konvexní množinu obsahující A , neboli průnik všech uzavřených konvexních podmnožin X obsahujících A ;
- $\text{span } A$ lineární obal A , tj. nejmenší podprostor obsahující A , neboli průnik všech vektorových podprostorů X obsahujících A ;
- $\overline{\text{span } A}$ uzavřený lineární obal A , tj. nejmenší uzavřený podprostor obsahující A , neboli průnik všech uzavřených vektorových podprostorů X obsahujících A .

Ukažte, že

$$\overline{\text{co } A} = \overline{\text{co } \overline{A}} \quad \text{a} \quad \overline{\text{span } A} = \overline{\text{span } \overline{A}}.$$

Návod: Použijte tvrzení z předchozích dvou příkladů.

Příklad 6. Necht' c je prostor všech posloupností reálných (nebo komplexních čísel), které mají vlastní limitu. Ukažte, že c je uzavřený podprostor prostoru ℓ^∞ , a tedy je to Banachův prostor (s normou $\|\cdot\|_\infty$).

Příklad 7. Necht' Γ je nespočetná množina. Označme

$$\ell_c^\infty(\Gamma) = \{f \in \ell^\infty(\Gamma); \{\gamma \in \Gamma; f(\gamma) \neq 0\} \text{ je nejvýše spočetná}\}.$$

- (1) Ukažte, že $\ell_c^\infty(\Gamma)$ je uzavřený podprostor $\ell^\infty(\Gamma)$.
- (2) Ukažte, že $c_0(\Gamma) \subset \ell_c^\infty(\Gamma)$.

Příklad 8. Necht' $\mathcal{B}_b([0, 1])$ značí vektorový prostor všech omezených borelovských funkcí na $[0, 1]$ a $\mathcal{L}_b([0, 1])$ značí vektorový prostor všech omezených lebesgueovsky měřitelných funkcí na $[0, 1]$. Ukažte, že oba tyto prostory jsou neseparabilní uzavřené podprostory $\ell^\infty([0, 1])$.

Návod: Použijte známý fakt, že bodová limita posloupnosti měřitelných funkcí je měřitelná. Pro důkaz neseparability uvažte charakteristické funkce jednobodových množin.

Příklad 9. Necht' $UL((0, 1))$ značí vektorový prostor všech funkcí na $(0, 1)$, která mají v každém bodě intervalu $[0, 1)$ vlastní limitu zprava a v každém bodě intervalu $(0, 1]$ mají vlastní limitu zleva.

- (1) Ukažte, že každá funkce z $UL((0, 1))$ je omezená na $(0, 1)$.
- (2) Ukažte, že $UL((0, 1))$ je uzavřený podprostor $\ell^\infty((0, 1))$.
- (3) Necht' $DA = \{f \in UL((0, 1)); f \text{ je zprava spojitá na } (0, 1)\}$. Ukažte, že DA je uzavřený podprostor $UL((0, 1))$.
- (4) Ukažte, že prostor DA je neseparabilní.

Návod: (1) Použijte kompaktnost $[0, 1]$. (2,3) Použijte Moore-Osgoodovu větu. (4) Uvažte charakteristické funkce vhodných intervalů.

Příklad 10. Necht'

$$X = \{f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{F}; \exists g \in \mathcal{C}([0, 1]; \mathbb{F}) \exists h \in c_0([0, 1]; \mathbb{F}) : f = g + h\}.$$

- (1) Ukažte, že vyjádření $f = g + h$ použité v definici je jednoznačné.
- (2) Ukažte, že X je uzavřený podprostor $\ell^\infty([0, 1])$.

Návod: (1) Ukažte, že jediná funkce z $c_0([0, 1])$, která je spojitá na $[0, 1]$, je konstantní nulová funkce. (2) Ukažte, že ve vyjádření z bodu (1) je $\|g\|_\infty \leq \|f\|_\infty$, a tento fakt využijte k důkazu uzavřenosti X .

Příklad 11. Necht' $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ značí prostor všech spojitých funkcí na $\mathbb{R}$, které mají v $+\infty$ i v $-\infty$ limitu nula. Ukažte, že $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ je uzavřený podprostor $\mathcal{C}_b(\mathbb{R})$.

Příklad 12. Pro posloupnost čísel (x_n) definujme její variaci vzorcem

$$\text{var}((x_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} |x_{n+1} - x_n|.$$

Označme symbolem bv množinu všech posloupností, jejichž variace je konečná.

- (1) Ukažte, že bv je vektorový podprostor ℓ^∞ .
- (2) Ukažte, že každá posloupnost s konečnou variací má vlastní limitu, tj. $bv \subset c$ (viz Příklad 6).
- (3) Najděte posloupnost v $c \setminus bv$.
- (4) Je bv uzavřený v c ?
- (5) Je bv hustý v c ?

(6) Pro $(x_n) \in bv$ položme

$$\|(x_n)\|_{bv} = |x_1| + \text{var}((x_n)).$$

Ukažte, že tento předpis definuje normu na bv , v níž je bv Banachův prostor.

- (7) Ukažte, že $\ell^1 \subset bv$ a že bv obsahuje konstantní posloupnosti.
Je $bv = \text{span}(\ell^1 \cup \{(1)_{n=1}^\infty\})$?
(8) Je ℓ^1 uzavřený podprostor bv (v normě $\|\cdot\|_{bv}$)?
(9) Jsou na ℓ^1 normy $\|\cdot\|_1$ a $\|\cdot\|_{bv}$ ekvivalentní?

Návod: (2) Použijte Bolzano-Cauchyovu podmínku. (5) Využijte fakt, že posloupnost od jistého členu konstantní patří do bv . (4) Použijte (3) a (5). (6) Využijte Větičku I.8 z přednášky. (7,8) Uvažte monotónní posloupnosti. (9) Ukažte, že pokud by tyto dvě normy byly ekvivalentní, pak $(\ell^1, \|\cdot\|_{bv})$ by byl úplný prostor.

Příklad 13. Nechť $n \in \mathbb{N}$. Označme

$\mathcal{C}^n([0, 1], \mathbb{F}) = \{f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{F}; f^{(n)} \text{ je spojitá na } (0, 1) \text{ a lze spojitě rozšířit na } [0, 1]\}$.

- (1) Ukažte, že pro každé $f \in \mathcal{C}^n([0, 1], \mathbb{F})$ a každé $k \in \{0, \dots, n\}$ je $f^{(k)}$ spojitá na $(0, 1)$ a lze spojitě rozšířit na $[0, 1]$.
(2) Ukažte, že vzorec

$$\|f\|_{\mathcal{C}^n} = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty + \dots + \|f^{(n)}\|_\infty, \quad f \in \mathcal{C}^n([0, 1], \mathbb{F})$$

definuje normu, v níž je prostor $\mathcal{C}^n([0, 1], \mathbb{F})$ úplný.

- (3) Definujme na $\mathcal{C}^2([0, 1], \mathbb{F})$ normu předpisem

$$\|f\| = \|f\|_\infty + \|f''\|_\infty, \quad f \in \mathcal{C}^2([0, 1], \mathbb{F}).$$

Ukažte, že to je norma ekvivalentní $\|\cdot\|_{\mathcal{C}^2}$.

- (4) Je norma na $\mathcal{C}^n([0, 1], \mathbb{F})$ definovaná vzorcem $\|f\| = \|f\|_\infty + \|f^{(n)}\|_\infty$ ekvivalentní $\|\cdot\|_{\mathcal{C}^n}$?

Návod: (1) Použijte matematickou indukci, Lagrangeovu větu o střední hodnotě a Bolzano-Cauchyovu podmínku. (2) Použijte větu o záměně limity a derivace a matematickou indukci. (3) Vyjádřete f' pomocí f'' a $f'(0)$ a f pomocí f' a $f(0)$. Ukažte, že $\|f_n\| \rightarrow 0$ implikuje $\|f'_n\|_\infty \rightarrow 0$. (4) Postupujte podobně jako v (3).

Příklad 14. Nechť $BV([0, 1], \mathbb{F})$ značí množinu všech funkcí $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{F}$, které mají konečnou variaci. Připomeňme, že variace funkce f na $[0, 1]$ je definována vzorcem

$$V(f) = \sup \left\{ \sum_{j=1}^n |f(x_j) - f(x_{j-1})|; n \in \mathbb{N}, 0 = x_0 < x_1 < \dots < x_n = 1 \right\}.$$

- (1) Ukažte, že každá $f \in BV([0, 1], \mathbb{F})$ je omezená na $[0, 1]$ a že $BV([0, 1], \mathbb{F})$ je vektorový podprostor $\ell^\infty([0, 1], \mathbb{F})$.
(2) Ukažte, že předpis

$$\|f\|_{BV} = \|f\|_\infty + V(f), \quad f \in BV([0, 1], \mathbb{F}),$$

definuje normu na $BV([0, 1], \mathbb{F})$, v níž je $BV([0, 1], \mathbb{F})$ Banachův prostor.

- (3) Ukažte, že předpis

$$\|f\| = |f(0)| + V(f), \quad f \in BV([0, 1], \mathbb{F}),$$

definuje normu na $BV([0, 1], \mathbb{F})$ ekvivalentní s $\|\cdot\|_{BV}$.

Návod: (2) Použijte Větičku I.8 z přednášky.

Příklad 15. Nechť $AC([0, 1], \mathbb{F})$ značí množinu všech funkcí $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{F}$ absolutně spojitých na $[0, 1]$. Připomeňme, že pro každou $f \in AC([0, 1], \mathbb{F})$ existuje derivace $f'(x)$ pro skoro všechna $x \in [0, 1]$ a navíc $f' \in L^1([0, 1])$.

- (1) Ukažte, že každá $f \in AC([0, 1], \mathbb{F})$ má konečnou variaci na $[0, 1]$ a že $AC([0, 1], \mathbb{F})$ je vektorový podprostor $BV([0, 1], \mathbb{F})$.
- (2) Ukažte, že předpis

$$\|f\|_{AC} = \|f\|_{\infty} + \|f'\|_{L^1}, \quad f \in AC([0, 1], \mathbb{F}),$$

definuje normu na $AC([0, 1], \mathbb{F})$, v níž je $AC([0, 1], \mathbb{F})$ Banachův prostor.

- (3) Ukažte, že předpis

$$\|f\| = |f(0)| + \|f'\|_{L^1}, \quad f \in AC([0, 1], \mathbb{F}),$$

definuje normu na $AC([0, 1], \mathbb{F})$ ekvivalentní s $\|\cdot\|_{AC}$.

- (4) Ukažte, že pro $f \in AC([0, 1], \mathbb{F})$ je $\|f\|_{AC} = \|f\|_{BV}$ a z toho odvoďte, že $AC([0, 1], \mathbb{F})$ je uzavřený podprostor $BV([0, 1], \mathbb{F})$.

Návod: (2) Použijte úplnost prostoru L^1 , Newton-Leibnizovu formuli pro absolutně spojitě funkce a záměnu limity a integrálu. (4) Je třeba ukázat, že $V(f) = \int_0^1 |f'|$. Pro důkaz nerovnosti $\leq$ použijte definici variace a Newton-Leibnizovu formuli pro absolutně spojitě funkce. Pro důkaz nerovnosti $\geq$ postupujte takto: Nechť $F(t) = V(f; 0, t)$ je variace f na $[0, t]$. Pak F je neklesající, $|f(s) - f(t)| \leq F(s) - F(t)$ pro $0 \leq t \leq s \leq 1$. Tedy $|f'| \leq F'$ skoro všude na $[0, 1]$. Odtud odvoďte, že $\int_0^1 |f'| \leq F(1) - F(0) = V(f)$.

Příklad 16. Nechť (M, d) je omezený metrický prostor. Označme symbolem $\text{Lip}((M, d); \mathbb{F})$ vektorový prostor všech lipschitzovských funkcí $f : M \rightarrow \mathbb{F}$. Pro $f \in \text{Lip}((M, d); \mathbb{F})$ označme $\text{lip}(f)$ nejmenší lipschitzovskou konstantu f , tj.

$$\text{lip}(f) = \sup \left\{ \frac{|f(x) - f(y)|}{d(x, y)}; x, y \in M, x \neq y \right\}.$$

- (1) Ukažte, že každá $f \in \text{Lip}((M, d); \mathbb{F})$ je omezená na M .
- (2) Ukažte, že vzorec

$$\|f\|_L = \|f\|_{\infty} + \text{lip}(f), \quad f \in \text{Lip}((M, d); \mathbb{F}),$$

definuje normu na $\text{Lip}((M, d); \mathbb{F})$ a $\text{Lip}((M, d); \mathbb{F})$ je s touto normou Banachův prostor.

- (3) Zvolme pevné $x_0 \in M$. Ukažte, že vzorec

$$\|f\| = |f(x_0)| + \text{lip}(f), \quad f \in \text{Lip}((M, d); \mathbb{F}),$$

definuje normu ekvivalentní s $\|\cdot\|_L$.

- (4) Uvažme $M = [0, 1]$ s euklidovskou metrikou. Ukažte, že pro $f \in \mathcal{C}^1([0, 1]; \mathbb{F})$ platí $f \in \text{Lip}([0, 1]; \mathbb{F})$ a $\|f\|_L = \|f\|_{\mathcal{C}^1}$. Ukažte, že $\mathcal{C}^1([0, 1]; \mathbb{F})$ je uzavřený podprostor $\text{Lip}([0, 1]; \mathbb{F})$.

Návod: (2) Použijte Větičku I.8 z přednášky. (4) Použijte Newton-Leibnizovu formuli.

Příklad 17. Nechť (M, d) je metrický prostor (ne nutně omezený). Označme symbolem $\text{Lip}((M, d); \mathbb{F})$ vektorový prostor všech lipschitzovských funkcí $f : M \rightarrow \mathbb{F}$ a pro $f \in \text{Lip}((M, d); \mathbb{F})$ označme $\text{lip}(f)$ nejmenší lipschitzovskou konstantu f (viz Příklad 16). Zvolme pevné $x_0 \in M$.

- (1) Ukažte, že prvky $\text{Lip}((M, d); \mathbb{F})$ nemusí být omezené na M .

(2) Ukažte, že vzorec

$$\|f\| = |f(x_0)| + \text{lip}(f), \quad f \in \text{Lip}((M, d); \mathbb{F}),$$

definuje normu na $\text{Lip}((M, d); \mathbb{F})$ a $\text{Lip}((M, d); \mathbb{F})$ je s touto normou Banachův prostor.

(3) Zvolme $x_1 \in M \setminus \{x_0\}$ a definujme normu na $\text{Lip}((M, d); \mathbb{F})$ stejným způsobem, jen bod x_0 v definici nahradíme bodem x_1 . Je tato norma ekvivalentní normě z předchozího bodu?

Příklad 18. Necht' μ je nezáporná míra a $p \in [1, \infty]$.

- (1) Ukažte, že jednoduché funkce v $L^p(\mu)$ tvoří hustý podprostor $L^p(\mu)$.
- (2) Necht' μ je regulární borelovská míra na nějakém metrickém prostoru M . Ukažte, že lineární kombinace charakteristických funkcí otevřených množin konečné míry tvoří hustý podprostor $L^p(\mu)$ pro $p \in [1, \infty)$.
- (3) Necht' μ je navíc σ -konečná a M separabilní. Ukažte, že prostor $L^p(\mu)$ pro $p \in [1, \infty)$ je separabilní.

Návod: (3) ukažte, že existuje spočetná báze otevřených množin M tvořená otevřenými množinami konečné míry. Ukažte, že charakteristickou funkci otevřené množiny konečné míry lze aproximovat charakteristickými funkcemi konečných sjednocení prvků báze a následně použijte výsledek (2).

Příklad 19. Necht' (X_n) je posloupnost normovaných lineárních prostorů a necht' $\prod_{n=1}^{\infty} X_n$ je jejich kartézský součin uvažovaný jako vektorový prostor s obvyklými operacemi.

(1) Ukažte, že

$$\left(\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} X_n\right)_{\ell^\infty} = \{(x_n) \in \prod_{n=1}^{\infty} X_n; \sup_{n \in \mathbb{N}} \|x_n\|_{X_n} < \infty\}$$

je normovaný lineární prostor, pokud normu definujeme jako $\|(x_n)\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} \|x_n\|_{X_n}$. Ukažte, že tento prostor je úplný, právě když každý z prostorů X_n je úplný.

(2) Ukažte, že

$$\left(\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} X_n\right)_{c_0} = \{(x_n) \in \prod_{n=1}^{\infty} X_n; \lim_n \|x_n\|_{X_n} = 0\}$$

je uzavřený podprostor $(\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} X_n)_{\ell^\infty}$

Příklad 20. Necht' (X_n) je posloupnost normovaných lineárních prostorů a $p \in [1, \infty)$. Položme

$$\left(\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} X_n\right)_{\ell^p} = \{(x_n) \in \prod_{n=1}^{\infty} X_n; \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|_{X_n}^p < \infty\}.$$

Ukažte, že to je normovaný lineární prostor, pokud normu definujeme jako $\|(x_n)\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|_{X_n}^p\right)^{1/p}$. Ukažte, že tento prostor je úplný, právě když všechny prostory X_n jsou úplné.

Návod: Pro důkaz úplnosti použijte Větičku I.8 z přednášky.

K ODDÍLU I.2 – SPOJITÁ LINEÁRNÍ ZOBRAZENÍ, IZOMETRICKÉ A IZOMORFNÍ PROSTORY

Příklad 21.

- (1) Ukažte, že prostory $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1)$ a $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$ jsou izometrické a najděte nějakou lineární izometrii mezi nimi.

- (2) UkaŹte, Źe prostory $(\mathbb{R}^3, \|\cdot\|_1)$ a $(\mathbb{R}^3, \|\cdot\|_\infty)$ nejsou izometrické.
 (3) Jsou prostory $(\mathbb{C}^2, \|\cdot\|_1)$ a $(\mathbb{C}^2, \|\cdot\|_\infty)$ izometrické?

Návod: (2) PouŹijte pojem *extremálního bodu*: Bod z jednotkové koule je *extremální*, pokud není středem Źádné úsečky, která leŹí celá v jednotkové kouli. UkaŹte, Źe izometrie na zachovává extrémální body. Popište a spočítejte extrémální body jednotkových koulí obou prostorů. (3) Popište extrémální body jednotkových koulí obou prostorů a pouŹijte fakt, Źe kruŹnice není homeomorfní kartézskému součinu dvou kruŹnic.

Příklad 22. Nechť $(a, b) \subset \mathbb{R}$ je otevřený interval (omezený nebo neomezený). UkaŹte, Źe pro kaŹdé $p \in [1, \infty]$ je prostor $L^p((a, b))$ izometrický prostoru $L^p((0, 1))$.

Návod: Nejprve to dokaŹte pro omezený interval (a, b) (s vyuŹitím afinní bijekce mezi (a, b) a $(0, 1)$). Pro interval $(0, \infty)$ postupujte například takto: S vyuŹitím předchozího případu zvolte izometrii T_n prostoru $L^p((n-1, n))$ na prostor $L^p((\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}))$ pro $n \in \mathbb{N}$ a „slepte“ tyto izometrie. Pro ostatní neomezené intervaly postupujte podobně.

Příklad 23. UkaŹte, Źe prostor $L^p((0, 1))$ obsahuje podprostor izometrický prostoru ℓ^p .

Návod: UvaŹujte funkce konstantní na kaŹdém z intervalů $(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n})$, $n \in \mathbb{N}$.

Příklad 24. UkaŹte, Źe prostory c_0 a c (viz Příklad 6) jsou izomorfní a najděte nějaký izomorfismus mezi nimi. Jsou izometrické?

Návod: Pro zkoumání izometričnosti vyuŹijte extrémální body.

Příklad 25.

- (1) UkaŹte, Źe prostor $\mathcal{C}([0, 1])$ obsahuje podprostor izometrický prostoru c_0 .
 (2) Obsahuje $\mathcal{C}([0, 1])$ podprostor izometrický prostoru c (viz Příklad 6)?

Návod: (1) Sestrojte spojitě funkce $f_n : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, které jsou nulové mimo $[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$ a nabývají hodnoty 1 ve středu tohoto intervalu a uvaŹte jejich uzavřený lineární obal. (2) Přidejte k funkcím z bodu (1) ještě konstantní funkce.

Příklad 26. Nechť $T : L^1([0, 1]) \rightarrow AC([0, 1])$ je definováno vzorcem $Tf(t) = \int_0^t f$. UkaŹte, Źe T je izomorfismus do. Je T izometrie?

Návod: VyuŹijte Příklad 15.

Příklad 27. Nechť X je prostor z Příkladu 10. Pro $f \in X$ a uvedený rozklad $f = g + h$ označme $Pf = g$ a $Qf = h$. UvaŹujme P a Q jako zobrazení X do X . UkaŹte, Źe P a Q jsou spojitě projekce, spočítejte jejich normy, jádra a obory hodnot.

Příklad 28. Nechť $\mathcal{M}_{ac}([0, 1])$ značí podprostor $\mathcal{M}([0, 1])$ tvořený mírami, které jsou absolutně spojitě vzhledem k Lebesgueově míře.

- (1) UkaŹte, Źe $\mathcal{M}_{ac}([0, 1])$ je izometrický prostoru $L^1([0, 1])$ a popište nějakou izometrii mezi těmito prostory.
 (2) UkaŹte, Źe $\mathcal{M}_{ac}([0, 1])$ je uzavřený podprostor $\mathcal{M}([0, 1])$.

Návod: (1) PouŹijte Radon-Nikodýmovu větu.

Příklad 29. Pro $\mu \in \mathcal{M}([0, 1])$ definujme funkce $T_1(\mu)$ a $T_2(\mu)$ předpisem

$$\begin{aligned} T_1(\mu)(t) &= \mu([0, t]), \\ T_2(\mu)(t) &= \mu([0, t]), \end{aligned} \quad \text{pro } t \in [0, 1].$$

- (1) UkaŹte, Źe T_1 a T_2 jsou lineární operátory $\mathcal{M}([0, 1])$ do $BV([0, 1])$.
 (2) UkaŹte, Źe $\|T_1\| = 1$ a najděte $\ker T_1$.

- (3) Ukažte, že T_2 je izometrie.
- (4) Je některý z operátorů T_1 a T_2 na?

Návod: (3) S použitím regularity měř z $\mathcal{M}([0, 1])$ ukažte, že v definici totální variace těchto měř stačí brát disjunktní systémy polouzavřených intervalů. (4) Uvažte charakteristické funkce jednobodových množin.

Příklad 30. Nechť $\mathcal{M}_c([0, 1])$ značí podprostor $\mathcal{M}([0, 1])$ tvořený spojitými mírami (tj. mírami, které jsou nulové na jednobodových množinách).

- (1) Ukažte, že $\mathcal{M}_c([0, 1]) = \ker(T_1 - T_2)$, kde T_1 a T_2 jsou jako v předchozím příkladu.
- (2) Nechť T je zúžení T_1 (nebo T_2) na $\mathcal{M}_c([0, 1])$. Ukažte, že T je izometrie $\mathcal{M}_c([0, 1])$ do $BV([0, 1])$ a že obor hodnot jsou právě spojitě funkce z $BV([0, 1])$.
- (3) Ukažte, prostory $\mathcal{M}_c([0, 1])$ a $BV_c([0, 1])$ (tvořený spojitými funkcemi z $BV([0, 1])$) jsou úplné.

K ODDÍLU I.3 – SKALÁRNÍ SOUČIN, HILBERTOVY PROSTORY

Příklad 31. Nechť X je komplexní vektorový prostor a nechť $\langle \cdot, \cdot \rangle$ je reálný skalární součin na X (tj. reálná funkce na $X \times X$, která splňuje podmínky (i),(iii)–(v) z definice a podmínku (ii) pro reálné λ) a $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ pro $x \in X$. Nechť $\|ix\| = \|x\|$ pro $x \in X$. Ukažte, že pak je $\|\cdot\|$ norma na komplexním prostoru X , která je indukovaná (komplexním) skalárním součinem.

Návod: S použitím polarizační identity ukažte, že $\langle x, ix \rangle = 0$ pro každé $x \in X$. Pak ukažte, že vzorec $\langle x, y \rangle_C = \langle x, y \rangle + i \langle x, iy \rangle$ definuje skalární součin na X a $\|x\|^2 = \langle x, x \rangle_C$.

Příklad 32. Nechť (X_n) je posloupnost Hilbertových prostorů. Nechť X je jejich ℓ^2 -suma (tj. prostor vzniklý postupem z Příkladu 20 pro $p = 2$). Ukažte, že X je Hilbertův prostor.

Návod: Použijte rovnoběžníkové pravidlo.

K ODDÍLU I.4 – ŘADY V NORMOVANÝCH PROSTORECH

Příklad 33. Nechť (e_n) je posloupnost kanonických jednotkových vektorů v prostoru ℓ^p nebo c_0 .

- (1) Ukažte, že $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e_n$ není absolutně konvergentní v žádném z těchto prostorů.
- (2) Ukažte, že $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e_n$ je bezpodmínečně konvergentní v každém z těchto prostorů s výjimkou prostoru ℓ^1 .

Příklad 34. Nechť (x_n) je posloupnost v Banachově prostoru. Dokažte, že následující tvrzení jsou ekvivalentní:

- (i) Řada $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ je bezpodmínečně konvergentní.
- (ii) Pro každou posloupnost (ϵ_n) znamének (tj. čísel 1 a -1) řada $\sum_{n=1}^{\infty} \epsilon_n x_n$ konverguje.
- (iii) Pro každou vybranou posloupnost (x_{n_k}) řada $\sum_{k=1}^{\infty} x_{n_k}$ konverguje.

Návod: (i) $\Leftrightarrow$ (iii) Použijte Bolzano-Cauchyovu podmínku (Tvrzení I.29(a) z přednášky).

K ODDÍLU I.5 – HILBERTOVY PROSTORY, KOLMOST, NEJBLIŽŠÍ PRVKY

Příklad 35. Nechť (Ω, Σ, P) je pravděpodobnostní prostor a Y_1, Y_2 jsou dvě nezávislé (reálné) náhodné veličiny s konečným druhým momentem a nulovou střední hodnotou. Ukažte, že Y_1 a Y_2 jsou kolmé prvky v prostoru $L^2(P)$.

Návod: Použijte definice příslušných pojmů z teorie pravděpodobnosti a vzorec pro střední hodnotu součinu nezávislých náhodných veličin.

Příklad 36.

- (1) Ukažte na příkladu, že v neúplném prostoru se skalárním součinem maximální ortonormální systém nemusí být úplný.
- (2) Ukažte, že v separabilním prostoru se skalárním součinem existuje úplný ortonormální systém.

Návod: (1) Uvažte například lineární obal množiny $\{e_2, e_3, \dots\} \cup \{(\frac{1}{n})_{n=1}^\infty\}$ v ℓ^2 . (2) Použijte ortogonalizaci na lineárně nezávislou posloupnost s hustým lineárním obalem.

K ODDÍLU I.6 – PROSTORY KONEČNÉ A NEKONEČNÉ DIMENZE

Příklad 37. Nechť X je normovaný lineární prostor konečné dimenze a $C \subset X$ neprázdná uzavřená konvexní množina.

- (1) Ukažte, že pro každé $x \in X$ existuje bod $y \in C$ nejbližší k x .
- (2) Najděte příklad X , C a x takový, že k x existuje v C více nejbližších bodů.
- (3) Ukažte, že, pokud $X = (\mathbb{F}^n, \|\cdot\|_p)$ pro $p \in (1, \infty)$, je nejbližší bod jednoznačně určen.

Návod: (1) Použijte kompaktnost omezených uzavřených množin. (2) Uvažte například $X = (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1)$. (3) Ukažte, že pro tyto prostory jednotková sféra neobsahuje žádnou úsečku, a že z toho tvrzení plyne.

Příklad 38. Nechť $(X, \|\cdot\|)$ je normovaný lineární prostor nekonečné dimenze. Ukažte, že na X existují normy $\|\cdot\|_a, \|\cdot\|_b$ s vlastnostmi

- (a) $\|\cdot\|_a \geq \|\cdot\|$ a přitom tyto dvě normy nejsou ekvivalentní;
- (b) identita na X není spojitá ani z $\|\cdot\|$ do $\|\cdot\|_b$ ani z $\|\cdot\|_b$ do $\|\cdot\|$.

Návod: Modifikujte důkaz Tvzení I.49(b) z přednášky.

K ODDÍLU I.7 – REÁLNÉ A KOMPLEXNÍ PROSTORY

Příklad 39. Nechť H je reálný Hilbertův prostor nekonečné dimenze. Ukažte, že H je izometrický X_R pro nějaký komplexní Hilbertův prostor X .

Návod: Použijte Důsledek I.41 z přednášky.

Příklad 40. Nechť $X = c_0(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ nebo $X = \ell^p(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ pro $p \in [1, \infty]$. Ukažte, že na X existuje komplexní struktura, tj. X je izomorfní Y_R pro nějaký komplexní Banachův prostor.

Návod: Použijte Tvzení I.51 z přednášky.

- Příklad 41.**
- (1) Nechť X je netriviální komplexní normovaný lineární prostor. Ukažte, že pro každé $x \in X_R$ existuje podprostor X_R izometrický $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$ obsahující x .
 - (2) Nechť $Y \subset\subset c_0(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ je podprostor dimenze 2. Ukažte, že jednotková sféra Y obsahuje úsečku.
 - (3) Ukažte, že $c_0(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ není izometrický X_R pro žádný komplexní prostor X .

Návod: (2) Jest $Y = \text{span}\{x, y\}$ pro lineárně nezávislé $x, y \in c_0(\mathbb{N}, \mathbb{R})$, $\|x\|_\infty = \|y\|_\infty = 1$. Pokud existuje n , že $|x_n| = |y_n| = 1$, pak S_Y obsahuje buď úsečku spojující x a y nebo úsečku spojující x a $-y$. V případě, že takové n neexistuje, označme $F = \{n; |x_n| = 1\}$. Nechť $n \in F$ je takové, že $|y_n - x_n|$ je nejmenší. BÚNO $x_n = 1$ (jinak místo x a y uvažujme $-x$ a $-y$). Pak pro dost malé $\varepsilon > 0$ je $\|x + \varepsilon y\| = 1 + \varepsilon y_n$. Odtud plyne existence úsečky na S_Y .

DALŠÍ PŘÍKLADY SOUVISEJÍCÍ S ÚVODNÍ KAPITOLOU

Příklad 42. Necht X je reálný normovaný lineární prostor dimenze n a $A \subset X$.

- (1) Ukažte, že pro každý $x \in \operatorname{co} A$ existují $a_1, \dots, a_{n+1} \in A$, že $x \in \operatorname{co} \{a_1, \dots, a_{n+1}\}$.
- (2) Je-li A kompaktní, dokažte, že $\operatorname{co} A$ je také kompaktní.
- (3) Jaká varianta (1) platí pro komplexní prostory?

Návod: (2) Použijte známá fakta, že kartézský součin kompaktních množin je kompaktní množina a že spojitý obraz kompaktní množiny je kompaktní množina. S využitím (1) vyjádřete $\operatorname{co} A$ jako spojitý obraz $A^{n+1} \times K$, kde K je vhodná kompaktní podmnožina $\mathbb{R}^{n+1}$.

Příklad 43. Necht X je Banachův prostor a $A \subset X$ je kompaktní.

- (1) Ukažte, že $\overline{\operatorname{co}} A$ je kompaktní.
- (2) Ukažte na protipříkladu, že $\operatorname{co} A$ nemusí být kompaktní.

Návod: (1) Ukažte, že $\operatorname{co} A$ je totálně omezená. (2) Využijte fakt, že, pokud $x_n \rightarrow x$, pak množina $\{x\} \cup \{x_n; n \in \mathbb{N}\}$ je kompaktní.

Příklad 44. Necht X je reálný normovaný lineární prostor konečné dimenze a $A \subset X$ je konvexní množina splňující $\operatorname{span} A = X$. Ukažte, že A má neprázdný vnitřek v X .

Návod: BÚNO $0 \in A$. Necht $a_1, \dots, a_n \in A$ je báze X . Ukažte, že $\frac{1}{n+1}(a_1 + \dots + a_n)$ je vnitřní bod A . (Uvažte duální bázi a použijte, že všechny lineární funkcionály jsou spojité – Důsledek I.45(e) z přednášky.)

Příklad 45. Necht X je Banachův prostor a $A \subset X$ je omezená množina. Označme

$$\operatorname{co}_\sigma A = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} t_n a_n; a_n \in A, t_n \in [0, 1] \text{ pro } n \in \mathbb{N}, \sum_{n=1}^{\infty} t_n = 1 \right\}.$$

- (1) Ukažte, že všechny uvedené řady konvergují v X .
- (2) Ukažte, že $\operatorname{co} A \subset \operatorname{co}_\sigma A \subset \overline{\operatorname{co}} A$.
- (3) Ukažte na protipříkladech, že nemusí platit rovnosti.

Návod: (3) Pro první inkluzi použijte stejný protipříklad jako v Příkladu 43, pro druhou uvažte například otevřenou kouli.