

## II.2 Podprostory a kvocienty

**Tvrzení 10** (kvocient normovaného lineárního prostoru). *Nechť  $X$  je normovaný lineární prostor a  $Z$  je jeho uzavřený podprostor. Definujme na  $X$  ekvivalenci  $\sim$  vztahem  $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in Z$ . Pro  $x \in X$  označme symbolem  $[x]$  třídu ekvivalence obsahující bod  $x$ , tj.*

$$[x] = \{y \in X; y - x \in Z\} = x + Z.$$

Dále položme

$$X/Z = \{[x]; x \in X\}$$

a definujme na  $X/Z$  operace

$$[x] + [y] = [x + y], \quad \lambda \cdot [x] = [\lambda x] \quad \text{pro } x, y \in X \text{ a } \lambda \in \mathbb{F}.$$

Dále pro  $x \in X$  položme

$$\|[x]\|_{X/Z} = \inf\{\|y\|; y \in [x]\}.$$

Pak platí:

- Operace na  $X/Z$  jsou dobře definovány a  $X/Z$  s těmito operacemi tvoří vektorový prostor.
- Pro každé  $x \in X$  platí  $\|[x]\|_{X/Z} = \text{dist}(0, [x]) = \text{dist}(x, Z)$ .
- $\|\cdot\|_{X/Z}$  je norma na  $X/Z$ ,  $(X/Z, \|\cdot\|_{X/Z})$  je tedy normovaný lineární prostor.
- Je-li  $X$  úplný, je i  $(X/Z, \|\cdot\|_{X/Z})$  úplný.

**Poznámka:** Prostor  $(X/Z, \|\cdot\|_{X/Z})$  se nazývá **kvocient  $X$  podle  $Z$**  nebo též **faktorprostor  $X$  podle  $Z$** . Obvykle píšeme jen  $X/Z$  místo  $(X/Z, \|\cdot\|_{X/Z})$ . Zobrazení  $q : x \mapsto [x]$  nazýváme **kanonické kvocientové zobrazení  $X$  na  $X/Z$** .

**Větička 11.** *Nechť  $q$  je kanonické kvocientové zobrazení  $X$  na  $X/Z$ . Pak  $q$  je lineární a splňuje  $q(U_X) = U_{X/Z}$ . Speciálně,  $\|q\| \leq 1$ .*

**Tvrzení 12** (faktorizace lineárního operátoru). *Nechť  $X$  a  $Y$  jsou normované lineární prostory a  $T \in L(X, Y)$ .*

- Nechť  $Z \subset \ker T$  je uzavřený podprostor. Pak existuje právě jedno  $\tilde{T} \in L(X/Z, Y)$  takové, že  $T = \tilde{T}q$ , kde  $q$  je kanonické kvocientové zobrazení  $X$  na  $X/Z$ . Zobrazení  $\tilde{T}$  splňuje  $\|\tilde{T}\| = \|T\|$ .
- Je-li  $Z = \ker T$ , je zobrazení  $\tilde{T}$  z bodu (a) navíc prosté.

**Poznámka:** Pokud je operátor  $\tilde{T}$  z Tvzení 12(b) izometrie  $X/\ker T$  na  $Y$ , pak se operátor  $T$  obvykle nazývá **kvocientový**. Z Větičky 11 pak plyne, že  $T$  je kvocientový, právě když  $T(U_X) = U_Y$ . Pokud platí  $T(B_X) = B_Y$ , platí i  $T(U_X) = U_Y$ , a tedy operátor  $T$  je kvocientový. Na druhou stranu, kvocientový operátor nemusí splňovat  $T(B_X) = B_Y$ .

**Větička 13** (kvocient Hilbertova prostoru). *Nechť  $H$  je Hilbertův prostor a  $Z$  jeho uzavřený podprostor. Pak  $H/Z$  je rovněž Hilbertův prostor. Navíc, pokud  $q$  je kanonické kvocientové zobrazení, pak  $q$  zobrazuje ortogonální doplněk  $Z^\perp$  izometricky na  $H/Z$ .*

**Značení:** Nechť  $X$  je normovaný lineární prostor.

- Je-li  $A \subset X$ , označme

$$A^\perp = \{f \in X^*; \forall x \in A : f(x) = 0\}.$$

- Je-li  $B \subset X^*$ , označme

$$B_\perp = \{x \in X; \forall f \in B : f(x) = 0\}.$$

**Poznámka:** Je-li  $X$  prostor se skalárním součinem, pak symbolem  $A^\perp$  se může značit buď ortogonální doplněk (jde tedy o podprostor  $X$ ) nebo podprostor  $X^*$  dle výše uvedené definice. Kterou možnost máme na mysli, vyplyne z kontextu. O vztahu mezi těmito dvěma možnostmi více viz oddíl II.4.

**Věta 14** (dualita podprostorů a kvocientů). *Nechť  $X$  je normovaný lineární prostor a  $Z$  jeho uzavřený podprostor.*

- Nechť  $q : X \rightarrow X/Z$  je kanonické kvocientové zobrazení. Pak zobrazení  $T : (X/Z)^* \rightarrow X^*$  definované vzorcem  $T(f) = f \circ q$  je izometrie  $(X/Z)^*$  na  $Z^\perp$ .*
- Zobrazení  $R : f \mapsto f|_Z$  je kvocientové zobrazení  $X^*$  na  $Z^*$ , jehož jádro je  $Z^\perp$ . Tedy zobrazení  $\tilde{R}$  z Tvzení 12(b) je izometrie  $X^*/Z^\perp$  na  $Z^*$ .*

**Věta 15** (univerzalita  $\ell^\infty(\Gamma)$  a  $\ell^1(\Gamma)$ ).

- Každý Banachův prostor je izometrický uzavřenému podprostoru  $\ell^\infty(\Gamma)$  pro vhodnou množinu  $\Gamma$ . Separabilní Banachův prostor je izometrický podprostoru  $\ell^\infty$ .*
- Každý Banachův prostor je izometrický nějakému kvocientu prostoru  $\ell^1(\Gamma)$  pro vhodnou množinu  $\Gamma$ . Separabilní Banachův prostor je izometrický nějakému kvocientu prostoru  $\ell^1$ .*