II.2 Duál k $H(G)$, Rungeho věta a její aplikace

Definice. Nechť $M \subset \overline{\mathbb{C}}$ je libovolná množina. Symbolem $H(M)$ značíme množinu všech funkcí holomorfních na M (tj. holomorfních na nějaké otevřené množině obsahující M).

Věta 5 (Rieszova věta o reprezentaci). *Nechť K je kompaktní Hausdorffův prostor (například K je kompaktní podmnožina $\mathbb{C}$). Nechť $C(K)$ značí Banachův prostor všech spojitých komplexních funkcí na K opatřený supremovou normou. Nechť $L : C(K) \to \mathbb{C}$ je lineární funkcionál. Následující podmínky jsou ekvivalentní.*

(1) *L je spojité.*
(2) *Existuje konečná nezáporná regulární borelovská míra μ na K a borelovská funkce $h : K \to \mathbb{C}$ splňující $|h(x)| = 1$ pro každé $x \in K$ tak, že $L(f) = \int_K fh \,\mathrm{d}\mu$ pro $f \in C(K)$.*
(3) *Existuje komplexní regulární borelovská míra ν na K, že $L(f) = \int_K f \,\mathrm{d}\nu$ pro $f \in C(K)$.*

Věta 6 (popis duálu k $H(G)$). *Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je otevřená množina a $L : H(G) \to \mathbb{C}$ je lineární zobrazení. Pak následující podmínky jsou ekvivalentní:*

(1) *L je spojité.*
(2) *Existuje $K \subset G$ kompaktní a $C > 0$ takové, že pro každé $f \in H(G)$ je $|L(f)| \leq C\varphi_K(f)$.*
(3) *Existuje $K \subset G$ kompaktní, konečná nezáporná regulární borelovská míra μ na K a borelovská funkce $h : K \to \mathbb{C}$ splňující $|h(x)| = 1$ pro každé $x \in K$ tak, že $L(f) = \int_K fh \,\mathrm{d}\mu$ pro $f \in H(G)$.*
(4) *Existuje taková $g \in H(\overline{\mathbb{C}} \setminus G)$, pro kterou $g(\infty) = 0$, a taková kompaktní množina $K \subset G$, že pro každý cykl Γ splňující podmínky z Věty I.8 platí $L(f) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma fg$ pro $f \in H(G)$.*

Poznámky.

(a) Množina K vyskytující se v bodě (2) a (3) se nazývá **nosič** funkcionálu L. Hodnota $L(f)$ závisí jen na hodnotách f na tomto K.
(b) Funkce g z bodu (4) splňuje vzorec

$$g(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{g(w)}{z - w} \,\mathrm{d}w$$

na nějaké otevřené množině obsahující $\overline{\mathbb{C}} \setminus G$. Je tedy určena jednoznačně v tom smyslu, že pokud g_1, g_2 jsou dvě takové funkce, pak existuje otevřená množina $U \supset \overline{\mathbb{C}} \setminus G$, že $g_1 = g_2$ na U.

Věta 7 (Runge). *Nechť $K \subset \mathbb{C}$ je kompaktní množina a $M \subset \overline{\mathbb{C}} \setminus K$ je množina obsahující z každé komponenty množiny $\overline{\mathbb{C}} \setminus K$ alespoň jeden bod. Pak pro každou $f \in H(K)$ existuje posloupnost R_n racionálních funkcí s póly pouze v množině M, která konverguje k f stejnoměrně na K.*

Důsledek. *Je-li $K \subset \mathbb{C}$ taková kompaktní množina, že $\mathbb{C} \setminus K$ je souvislá, pak pro každou $f \in H(K)$ existuje posloupnost polynomů konvergující k f stejnoměrně na K.*

Poznámka. Předchozí důsledek neplatí pro žádnou kompaktní $K \subset \mathbb{C}$, pro níž není $\mathbb{C} \setminus K$ souvislá.

Věta 7′ (Runge). *Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je otevřená a $M \subset \overline{\mathbb{C}} \setminus G$ je množina obsahující z každé komponenty množiny $\overline{\mathbb{C}} \setminus G$ alespoň jeden bod. Pak množina všech racionálních funkcí, které mají póly jen v bodech množiny M, je hustá v $H(G)$.*

Důsledek. *Je-li $G \subset \mathbb{C}$ taková otevřená množina, že $\overline{\mathbb{C}} \setminus G$ je souvislá, pak polynomy jsou husté v $H(G)$.*

Poznámka. Předchozí důsledek neplatí pro žádnou otevřenou $G \subset \mathbb{C}$, pro níž není $\overline{\mathbb{C}} \setminus G$ souvislá.

Věta 7″ (Runge). *Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je otevřená, $M \subset \overline{\mathbb{C}} \setminus G$ a $c : M \to \{1, \infty\}$. Předpokládejme, že každá komponenta množiny $\overline{\mathbb{C}} \setminus M$ obsahuje buď hromadný bod množiny M nebo takové $m \in M$, pro které je $c(m) = \infty$. Nechť Y je množina všech racionálních funkcí s póly jen v bodech množiny M; přičemž, je-li $c(m) = 1$, je násobnost pólu v bodě m nejvýše 1. Pak Y je hustá v $H(G)$.*

Věta 8 (Mittag-Leffler). *Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je otevřená množina, $A \subset G$ množina izolovaná v G a pro každé $a \in A$ nechť P_a je polynom splňující $P_a(0) = 0$. Pak existuje $f \in M(G)$, která má póly právě v bodech množiny A, a hlavní část Laurentova rozvoje funkce f v prstencovém okolí bodu $a \in A$ je $P_a(\frac{1}{z-a})$.*

Věta 9 (Osgood). *Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je otevřená množina a (f_n) je taková posloupnost funkcí z $H(G)$, že posloupnost $(f_n(z))$ konverguje pro každé $z \in G$. Pak existuje taková otevřená hustá podmnožina $U \subset G$, že funkce f_n konvergují lokálně stejnoměrně na U (a limita je holomorfní na U).*

Věta 10. *Nechť $D = U(0,1)$. Označme*

$$M = \{f \in H(D) : (\forall \alpha \in \mathbb{R})(\{f(re^{i\alpha}) : r \in (0,1)\} \text{ je hustá v } \mathbb{C})\}.$$

Pak $H(D) \setminus M$ je první kategorie v $H(D)$.