I.1 Meromorfní funkce

Definice. Nechť $G \subset \overline{\mathbb{C}}$ je neprázdná otevřená množina.

(i) Symbolem $H(G)$ budeme značit množinu všech komplexních funkcí holomorfních na G.

(ii) Funkce $f : G \to \overline{\mathbb{C}}$ se nazývá **meromorfní**, jestliže je spojitá na G a existuje množina $M \subset G$, která je izolovaná v G (tj. nemá v G hromadný bod), taková, že f je holomorfní na $G \setminus M$.

(iii) Množinu všech funkcí meromorfních na G značíme $M(G)$.

Poznámka. V bodech výjimečné množiny M z definice má meromorfní funkce **nejvýše pól** (tj. buď pól nebo odstranitelnou singularitu).

Větička 1. *Nechť $G \subset \overline{\mathbb{C}}$ je neprázdná otevřená množina a $f, g \in M(G)$.*

- *Existuje právě jedna $u \in M(G)$ taková, že rovnost $u(z) = f(z) + g(z)$ platí pro všechna $z \in G$ s výjimkou bodů nějaké množiny izolované v G.*
- *Existuje právě jedna $v \in M(G)$ taková, že rovnost $v(z) = f(z) \cdot g(z)$ platí pro všechna $z \in G$ s výjimkou bodů nějaké množiny izolované v G.*
- *Existuje právě jedna $w \in M(G)$ taková, že rovnost $w(z) = f'(z)$ platí pro všechna $z \in G$ s výjimkou bodů nějaké množiny izolované v G.*

Poznámka. Funkci u nazýváme **součtem** funkcí $f, g \in M(G)$ a píšeme $u = f + g$. Funkci v nazýváme **součinem** funkcí $f, g \in M(G)$ a píšeme $u = f \cdot g = fg$. Analogicky definujeme násobek meromorfní funkce komplexním číslem a rozdíl dvou meromorfních funkcí. Funkci w nazýváme **derivací** funkce $f \in M(G)$ a píšeme $w = f'$. Analogicky definujem druhou derivaci i vyšší derivace.

Věta 2 (o jednoznačnosti). *Nechť $G \subset \overline{\mathbb{C}}$ je oblast, $f, g \in M(G)$ jsou takové, že množina*

$$\{z \in G : f(z) = g(z)\}$$

není izolovaná v G. Pak $f = g$.

Větička 3. *Nechť $G \subset \overline{\mathbb{C}}$ je neprázdná oblast a $f, g \in M(G)$, přičemž g není konstantní nulová funkce. Pak existuje právě jedna $w \in M(G)$ taková, že rovnost $w(z) = \frac{f(z)}{g(z)}$ platí pro všechna $z \in G$ s výjimkou bodů nějaké množiny izolované v G. Tuto funkci w nazýváme* **podílem** *funkcí f a g, píšeme $w = \frac{f}{g}$.*

Důsledek. *Je-li $G \subset \overline{\mathbb{C}}$ neprázdná oblast, pak $M(G)$ s výše uvedenými operacemi sčítání a násobení je komutativní těleso.*

Větička 4. *Funkce meromorfní na $\overline{\mathbb{C}}$ je funkce racionální.*

Věta 5 (princip argumentu pro meromorfní funkce). *Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je oblast, Γ cykl takový, že $\langle\Gamma\rangle \subset G$ a pro každé $a \in \mathbb{C} \setminus G$ je $\operatorname{ind}_\Gamma a = 0$. Nechť $f \in M(G)$ na $\langle\Gamma\rangle$ nabývá jen konečných nenulových hodnot. Je-li $a \in G$ kořenem funkce f, označme $N_f(a)$ jeho násobnost. Má-li funkce f v bodě $a \in G$ pól, označme $P_f(a)$ jeho násobnost. Pak platí:*

$$\sum_{a\in G, f(a)=0} N_f(a) \cdot \operatorname{ind}_\Gamma a - \sum_{a\in G, f(a)=\infty} P_f(a) \cdot \operatorname{ind}_\Gamma a = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f'}{f} = \frac{1}{2\pi i}\Delta_\Gamma \log f.$$

Věta 6 (Rouchéova věta). *Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je oblast, Γ cykl takový, že $\langle\Gamma\rangle \subset G$ a pro každé $a \in \mathbb{C} \setminus G$ je $\operatorname{ind}_\Gamma a = 0$. Nechť $f, g \in M(G)$ splňují pro každé $z \in \langle\Gamma\rangle$*

$$|f(z) - g(z)| < |f(z)|.$$

Pak (při značení z Věty 5)

$$\sum_{a\in G, f(a)=0} N_f(a) \cdot \operatorname{ind}_\Gamma a - \sum_{a\in G, f(a)=\infty} P_f(a) \cdot \operatorname{ind}_\Gamma a =$$
$$= \sum_{a\in G, g(a)=0} N_g(a) \cdot \operatorname{ind}_\Gamma a - \sum_{a\in G, g(a)=\infty} P_g(a) \cdot \operatorname{ind}_\Gamma a.$$

Věta 7. *Nechť $a \in \overline{\mathbb{C}}$, $R > 0$, f je holomorfní na $P(a, R)$ a má v bodě a pól násobnosti $p \in \mathbb{N}$. Pak existuje $r \in (0, R)$ a $M > 0$ tak, že pro každé $w \in \mathbb{C}$, $|w| > M$, f nabývá hodnoty w v právě p různých bodech z $P(a, r)$.*

Důsledek. *Nechť $G \subset \overline{\mathbb{C}}$ je otevřená. Je-li $f \in M(G)$ prostá na G, pak f má v G nejvýše jeden pól, a to násobnosti 1.*

Věta 8. *Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je neprázdná otevřená množina a $K \subset G$ je kompaktní množina. Pak existuje cykl Γ, pro který platí*

(i) $\langle\Gamma\rangle \subset G \setminus K$,
(ii) $\operatorname{ind}_\Gamma z = 1$ *pro* $z \in K$,
(iii) $\operatorname{ind}_\Gamma z = 0$ *pro* $z \in \mathbb{C} \setminus G$.
(iv) *Index vzhledem k Γ nabývá jen hodnot 0 nebo 1.*

Poznámka. Nechť G, K a Γ jsou jako ve Větě 8. Pak pro každou $f \in H(G)$ platí
$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(w)}{w - z}\,\mathrm{d}w, \qquad z \in K.$$

Věta 9 (Rouchéova věta). *Nechť $K \subset \mathbb{C}$ je kompaktní množina a $\Omega = \operatorname{Int} K$. Nechť f, g jsou spojité funkce definované na K s hodnotami v $\overline{\mathbb{C}}$, které jsou meromorfní na Ω. Předpokládejme, že pro každé $z \in \partial K$ platí $|f(z) - g(z)| < |f(z)|$ Pak (při značení z Věty 5)*

$$\sum_{a\in\Omega, f(a)=0} N_f(a) - \sum_{a\in\Omega, f(a)=\infty} P_f(a) = \sum_{a\in\Omega, g(a)=0} N_g(a) - \sum_{a\in\Omega, g(a)=\infty} P_g(a).$$