Matematika II – seznam otázek pro ústní pohovor

1. Vysvětlete, které implikace mezi následujícími tvrzeními platí. (A je podmnožina $\mathbf{R}^2$.)
   (a) A je otevřená.
   (b) A není uzavřená.
   (c) $A \cap H(A) = \emptyset$.
   (d) Pro každé $\boldsymbol{x} \in A$ a každou posloupnost $\{\boldsymbol{x}_n\}$ prvků $\mathbf{R}^2$, která konverguje k $\boldsymbol{x}$ existuje $n \in \mathbb{N}$, pro něž $\boldsymbol{x}_n \in A$.

2. Vysvětlete, které implikace mezi následujícími tvrzeními platí. (A je podmnožina $\mathbf{R}^2$, $\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^2$.)
   (a) $\boldsymbol{x}$ je hraniční bod množiny A.
   (b) $\boldsymbol{x} \in A$ a $\boldsymbol{x}$ není vnitřní bod množiny A.
   (c) $\boldsymbol{x} \in \overline{A} \cap \overline{\mathbf{R}^2 \setminus A}$.
   (d) $\boldsymbol{x} \in A$ a existuje posloupnost $\{\boldsymbol{x}_n\}$ prvků $\mathbf{R}^2 \setminus A$, která konverguje k $\boldsymbol{x}$.

3. Vysvětlete, které implikace mezi následujícími tvrzeními platí. (A je podmnožina $\mathbf{R}^2$, $\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^2$.)
   (a) $\boldsymbol{x}$ je hraniční bod množiny A.
   (b) $\boldsymbol{x}$ je hraniční bod množiny $\overline{A}$.
   (c) $\boldsymbol{x}$ je hraniční bod množiny $\mathbf{R}^2 \setminus A$.
   (d) $\boldsymbol{x}$ je hraniční bod množiny $\operatorname{Int} A$.

4. Vysvětlete, které implikace mezi následujícími tvrzeními platí. (A je podmnožina $\mathbf{R}^2$.)
   (a) A je omezená.
   (b) A je kompaktní.
   (c) $\overline{A}$ je kompaktní.
   (d) Z každé posloupnosti prvků množiny A lze vybrat konvergentní posloupnost s limitou v $\mathbf{R}^2$.

5. Vysvětlete, které implikace mezi následujícími tvrzeními platí. (f je funkce definovaná na $\mathbf{R}$.)

   (a) f je rostoucí na $\mathbf{R}$.

   (b) f je ryze konkávní na $\mathbf{R}$.

   (c) f je ryze kvazikonkávní na $\mathbf{R}$.

   (d) f nenabývá na $\mathbf{R}$ svého minima.

6. Vysvětlete, které implikace mezi následujícími tvrzeními platí. (f je funkce definovaná na $\mathbf{R}^2$.)

   (a) f je konkávní na $\mathbf{R}^2$.

   (b) f je kvazikonkávní na $\mathbf{R}^2$.

   (c) f^3 je kvazikonkávní na $\mathbf{R}^2$.

   (d) f^2 je kvazikonkávní na $\mathbf{R}^2$.

7. Vysvětlete, které implikace mezi následujícími tvrzeními platí. ($\mathbb{A}$ je čtvercová matice řádu 3.)

   (a) Hodnost $\mathbb{A}$ je rovna 3.

   (b) Matice $\mathbb{A}^T\mathbb{A}$ je regulární.

   (c) Matice $\mathbb{A} \cdot \mathbb{A}$ je regulární.

   (d) $\mathbb{A}\mathbf{x} \neq \mathbf{o}$ pro každé $\mathbf{x} \in M(3 \times 1) \setminus \{\mathbf{o}\}$.

8. Vysvětlete, které implikace mezi následujícími tvrzeními platí. ($\mathbb{A}$ a $\mathbb{B}$ jsou čtvercové matice téhož řádu.)

   (a) $\mathbb{A}$ a $\mathbb{B}$ jsou regulární.

   (b) Matice $\mathbb{A}\mathbb{B}$ je regulární.

   (c) Matice $\mathbb{A}\mathbb{B}$ je nenulová.

   (d) Matice $\mathbb{A}$ a $\mathbb{B}$ jsou nenulové.

9. Vysvětlete, které implikace mezi následujícími tvrzeními platí. ($\mathbb{A}$ a $\mathbb{B}$ jsou čtvercové matice téhož řádu, přičemž $\mathbb{B}$ je regulární.)
   (a) $\mathbb{A}$ není nulová matice.
   (b) $\mathbb{A}\mathbb{B}$ není nulová matice.
   (c) $\mathbb{B}\mathbb{A}$ není nulová matice.
   (d) První sloupec matice $\mathbb{A}\mathbb{B}$ obsahuje nenulový prvek.

10. Vysvětlete, které implikace mezi následujícími tvrzeními platí. ($\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost reálných čísel.)
    (a) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.
    (b) $\lim n^2 a_n = 0$.
    (c) $\lim a_n = 0$.
    (d) $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konverguje.

11. Vysvětlete, které implikace mezi následujícími tvrzeními platí. ($\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost kladných reálných čísel.)
    (a) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ konverguje.
    (b) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.
    (c) $\lim \sqrt[n]{a_n} < 1$.
    (d) $\lim a_n = 0$.

12. Vysvětlete, které implikace mezi následujícími tvrzeními platí. ($\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je neklesající posloupnost reálných čísel.)
    (a) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ konverguje.
    (b) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.
    (c) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n^2$ konverguje.
    (d) $\lim a_n = 0$.

13. Vysvětlete, které implikace mezi následujícími tvrzeními platí. ($\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost kladných reálných čísel.)

    (a) $\lim a_n = 0$.
    (b) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.
    (c) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ konverguje.
    (d) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^n$ konverguje.

14. Vysvětlete, které implikace mezi následujícími tvrzeními platí. ($\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost reálných čísel.)

    (a) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.
    (b) $\sum_{n=1}^{\infty}(a_{2n-1} + a_{2n})$ konverguje.
    (c) $\lim a_n = 0$.
    (d) Platí zároveň (2) a (3)

15. Vysvětlete, které implikace mezi následujícími tvrzeními platí. ($\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost reálných čísel.)

    (a) $\lim \sqrt[n]{|a_n|} \leq 1$.
    (b) $\lim n^2 a_n = 9$.
    (c) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.
    (d) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ konverguje.

16. Vysvětlete, které implikace mezi následujícími tvrzeními platí. (f je funkce spojitá na $\mathbb{R}$.)

    (a) Funkce f je sudá.
    (b) Každá primitivní funkce k f je lichá.
    (c) Existuje primitivní funkce k f, která je lichá.
    (d) $\int_{-2}^{-1} f = \int_{1}^{2} f$.

17. Vysvětlete, které implikace mezi následujícími tvrzeními platí. (f je funkce spojitá na $\mathbb{R}$.)

    (a) Funkce f je lichá.

    (b) Každá primitivní funkce k f je sudá.

    (c) Existuje primitivní funkce k f, která je sudá.

    (d) $\int_{-7}^{7} f = 0$.

18. Vysvětlete, které implikace mezi následujícími tvrzeními platí. (f je funkce spojitá na $\mathbb{R}$, která je periodická s periodou 3.)

    (a) Každá primitivní funkce k f je periodická s periodou 3.

    (b) $\int_{0}^{3} f = 0$.

    (c) Existuje primitivní funkce k f, která je periodická s periodou 3.

    (d) $\int_{0}^{15} f = 0$.

19. Vysvětlete, které implikace mezi následujícími tvrzeními platí. (f je funkce spojitá na $\mathbb{R}$.)

    (a) Funkce f je periodická s periodou 2.

    (b) Každá primitivní funkce k f je periodická s periodou 2.

    (c) Existuje primitivní funkce k f, která je periodická s periodou 2.

    (d) Pro každé $a \in \mathbb{R}$ platí $\int_{a}^{a+2} f = \int_{0}^{2} f$.

20. Vysvětlete, které implikace mezi následujícími tvrzeními platí. ($\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3$ jsou tři řádkové vektory délky 3.)

    (a) Vektory $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3$ jsou lineárně závislé.

    (b) Jeden z vektorů $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3$ je nulový.

    (c) Jeden z vektorů $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3$ je násobkem jiného z těchto vektorů.

    (d) Jeden z vektorů $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3$ je lineární kombinací zbylých dvou.

21. Vysvětlete, které implikace mezi následujícími tvrzeními platí. ($\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3$ jsou tři řádkové vektory délky 3.)

    (a) Vektory $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3$ jsou lineárně nezávislé.

    (b) Všechny vektory $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3$ jsou nenulové.

    (c) Vektory $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ jsou lineárně nezávislé, vektory $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_3$ jsou lineárně nezávislé a zároveň vektory $\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3$ jsou lineárně nezávislé.

    (d) Vektor $\boldsymbol{x}_3$ nelze vyjádřit jako lineární kombinaci $\boldsymbol{x}_1$ a $\boldsymbol{x}_2$.

22. Nechť $\{a_n\}$ je omezená posloupnost reálných čísel. Definujme funkci $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ předpisem

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x = 0, \\ a_n & x \in (\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\rangle, n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

    Ukažte, že f má Riemannův integrál přes $\langle 0, 1\rangle$ a spočtěte jej.

23. Nechť $\mathbb{A}_1, \ldots, \mathbb{A}_k$ jsou čtvercové matice řádů $n_1, \ldots, n_k$. Vytvořme z nich „blokově diagonální“ matici $\mathbb{B}$ řádu $n_1 + \cdots + n_k$ takto:

$$\mathbb{B} = \left(\begin{array}{c|c|c|c} \mathbb{A}_1 & 0 & \ldots & 0 \\ \hline 0 & \mathbb{A}_2 & \ldots & 0 \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline 0 & 0 & \ldots & \mathbb{A}_k \end{array}\right).$$

    Čemu se rovná $\det \mathbb{B}$? Zdůvodněte.

24. Nechť $\mathbb{A}$ je regulární matice řádu n, $\mathbb{A}^{-1}$ nechť je matice k ní inverzní. Nechť matice $\mathbb{B}$ vznikne z $\mathbb{A}$ aplikací transformace T, která spočívá v postupném provedení řádkových úprav

$$U_1, \ldots, U_k.$$

    Ukažte, že $\mathbb{B}^{-1}$ vznikne z $\mathbb{A}^{-1}$ aplikací jisté sloupcové transformace a popište tuto sloupcovou transformaci.

25. Nechť $\mathbb{A}$ je čtvercová matice řádu m a $\mathbb{B}$ je čtvercová matice řádu n. Čemu se rovná determinant matice

$$\mathbb{C} = \left(\begin{array}{c|c} 0 & \mathbb{A} \\ \hline \mathbb{B} & 0 \end{array}\right) \qquad ?$$

Zdůvodněte.

26. Vysvětlete, které implikace mezi následujícími tvrzeními platí. ($\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel.)

   (a) Řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

   (b) Řada
   $$a_2 + a_1 + a_4 + a_3 + a_6 + a_5 + a_8 + a_7 + \dots$$
   konverguje.

   (c) Řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}$ a $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1}$ konvergují.

   (d) Řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje absolutně.