IX.1 Vektorové prostory

Úmluva. *Symbol* $\mathbf{K}$ *značí* $\mathbf{R}$ *nebo* $\mathbf{C}$.

Definice. **Vektorovým prostorem nad $\mathbf{K}$** rozumíme trojici $(V, +, \cdot)$, kde V je neprázdná množina, $+$ je operace z $V \times V$ do V a $\cdot$ je operace z $\mathbf{K} \times V$ do V, pokud tyto operace mají následující vlastnosti.

(i) $\forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V \colon \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}$ (komutativita sčítání),
(ii) $\forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V \colon (\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} + (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w})$ (asociativita sčítání),
(iii) množina V obsahuje prvek, který značíme $\boldsymbol{o}$, splňující
$\forall \boldsymbol{v} \in V \colon \boldsymbol{o} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}$ (existence **nulového prvku**),
(iv) pro každý prvek $\boldsymbol{v} \in V$ existuje prvek, který značíme $-\boldsymbol{v}$ a nazýváme **prvkem opačným k $\boldsymbol{v}$**, splňující $\boldsymbol{v} + (-\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{o}$,
(v) $\forall a, b \in \mathbf{K}\, \forall \boldsymbol{v} \in V \colon a \cdot (b \cdot \boldsymbol{v}) = (ab) \cdot \boldsymbol{v}$,
(vi) $\forall a, b \in \mathbf{K}\, \forall \boldsymbol{v} \in V \colon (a + b) \cdot \boldsymbol{v} = a \cdot \boldsymbol{v} + b \cdot \boldsymbol{v}$,
(vii) $\forall a \in \mathbf{K}\, \forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V \colon a \cdot (\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = a \cdot \boldsymbol{u} + a \cdot \boldsymbol{v}$,
(viii) $\forall \boldsymbol{v} \in V \colon 1 \cdot \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}$.

Větička 1. *Nechť* $(V, +, \cdot)$ *je vektorový prostor nad* $\mathbf{K}$. *Potom platí:*

(i) $\forall \boldsymbol{v} \in V \colon 0 \cdot \boldsymbol{v} = \boldsymbol{o}$,
(ii) $\forall \boldsymbol{v} \in V \colon (-1) \cdot \boldsymbol{v} = -\boldsymbol{v}$.

Definice. Nechť $(V, +, \cdot)$ je vektorový prostor nad $\mathbf{K}$ a nechť $U \subset V$, $U \neq \emptyset$. Řekneme, že U je **vektorový podprostor** prostoru $(V, +, \cdot)$, jestliže platí:

(i) $\forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in U \colon \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \in U$,
(ii) $\forall a \in \mathbf{K}\, \forall \boldsymbol{u} \in U \colon a \cdot \boldsymbol{u} \in U$.

Místo vektorový podprostor často říkáme stručněji **podprostor**.

Poznámky.

(1) Je-li U podprostor $(V, +, \cdot)$, pak $\boldsymbol{o} \in U$ a $-\boldsymbol{u} \in U$, kdykoli $\boldsymbol{u} \in U$.
(2) Je-li U vektorový podprostor $(V, +, \cdot)$, můžeme zúžit definiční obor operace $+$ (resp. $\cdot$) na množinu $U \times U$ (resp. $\mathbf{K} \times U$) a tím dostat zobrazení $U \times U$ do U (resp. $\mathbf{K} \times U$ do U). Pak U s těmito novými operacemi tvoří vektorový prostor nad $\mathbf{K}$.

Definice. Nechť V je vektorový prostor nad $\mathbf{K}$. Nechť $m \in \mathbf{N}$, $\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_m \in V$ a $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbf{K}$. Výraz

$$\alpha_1 \boldsymbol{u}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{u}_2 + \dots + \alpha_m \boldsymbol{u}_m$$

nazýváme **lineární kombinací** vektorů $\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_m$ s koeficienty $\alpha_1, \dots, \alpha_m$. Pokud je alespoň jedno z čísel $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ různé od nuly, mluvíme o **netriviální lineární kombinaci**, v opačném případě jde o **triviální lineární kombinaci**.

Definice. Nechť V je vektorový prostor nad $\mathbf{K}$ a $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k \in V$. Symbolem $\mathrm{lin}_{\mathbf{K}}\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k\}$ označujeme množinu všech prvků V, které lze vyjádřit jako lineární kombinaci vektorů $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$. Tuto množinu nazýváme **vektorovým podprostorem generovaným vektory $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$.**

Věta 2. *Nechť V je vektorový prostor nad $\mathbf{K}$ a $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k \in V$. Pak je množina $\mathrm{lin}_{\mathbf{K}}\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k\}$ podprostorem V.*

Poznámka. Podobně lze definovat $\mathrm{lin}_{\mathbf{K}} M$, je-li M podmnožina vektorového prostoru V, jako množinu všech vektorů, které lze zapsat jako lineární kombinaci nějakých prvků M. I tato množina je podprostorem V.

Definice. Nechť V je vektorový prostor nad $\mathbf{K}$. Řekneme, že vektory $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_m$ z V ($m \in \mathbf{N}$) jsou **lineárně závislé**, pokud existuje jejich netriviální lineární kombinace, jež je rovna nulovému vektoru. Pokud vektory $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_m$ nejsou lineárně závislé, říkáme, že jsou **lineárně nezávislé**. Řekneme, že množina $M \subset V$ je **lineárně nezávislá**, jestliže pro každé $m \in \mathbf{N}$ je libovolná m-tice po dvou různých vektorů z M lineárně nezávislá; tj. kdykoli $m \in \mathbf{N}$ a $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_m$ jsou prvky M, které jsou po dvou různé (to znamená, že se mezi nimi žádný vektor nevyskytuje dvakrát), pak vektory $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_m$ jsou lineárně nezávislé.

Definice. Budiž V vektorový prostor nad $\mathbf{K}$. Řekneme, že množina $B \subset V$ je **báze** prostoru V, jestliže

(i) B je lineárně nezávislá,

(ii) každý vektor z V lze vyjádřit jako lineární kombinaci vektorů z B, tj.

$$\forall \boldsymbol{v} \in V\, \exists m \in \mathbf{N}\, \exists \boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_m \in B\, \exists \alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbf{K}\colon \boldsymbol{v} = \alpha_1 \boldsymbol{u}_1 + \cdots + \alpha_m \boldsymbol{u}_m.$$

Poznámka. (1) Podmínku (ii) lze zapsat ve tvaru $\mathrm{lin}_{\mathbf{K}} B = V$.

(2) Je-li B báze, je vyjádření každého vektoru $\boldsymbol{v}$ z podmínky (ii) jednoznačné.

Věta 3. *(i) Každý vektorový prostor má bázi. Dokonce každou lineárně nezávislou množinu lze doplnit na bázi.*

(ii) Počet prvků báze vektorového prostoru je jednoznačně určen. (T.j. všechny báze daného vektorového prostoru mají týž počet prvků.)

Definice. Počet prvků báze vektorového prostoru V se nazývá **dimenze** V a značí se $\dim V$.

Poznámka. $\dim V$ může být buď 0 (je-li $V = \{\boldsymbol{o}\}$) nebo přirozené číslo nebo $+\infty$.

Větička 4. *Nechť V je vektorový prostor nad $\mathbf{K}$, $\dim V = n$ (kde $n \in \mathbf{N}$) a $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n \in V$.*

(i) Jsou-li $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ lineárně nezávislé, tvoří bázi.

(ii) Pokud $\mathrm{lin}_{\mathbf{K}}\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\} = V$, je $\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ báze.