Písemná zkouška z Úvodu do komplexní analýzy (C)
ZS 2007-2008

Příklad 1: Uvažte křivku

$$\varphi = \psi \dotplus [6\pi, -6\pi] \dotplus [-6\pi, -6\pi + 6\pi i] \dotplus [-6\pi + 6\pi i, 6\pi i] \dotplus [6\pi i, \tfrac{\pi}{2} i],$$

kde

$$\psi(t) = te^{it}, \qquad t \in [\tfrac{\pi}{2}, 6\pi].$$

Načrtněte $\langle\varphi\rangle$ a určete hodnotu indexu vzhledem k φ v jednotlivých komponentách $\mathbb{C} \setminus \langle\varphi\rangle$. (10 bodů)

Příklad 2: Spočtěte integrál:

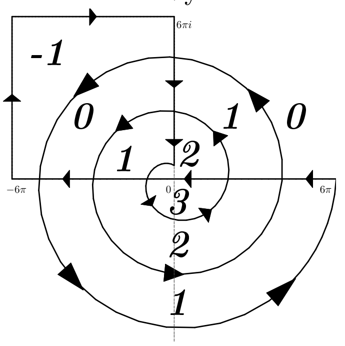
$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos \pi x}{4x^4 + 3x^2 - 1}\, \mathrm{d}x \qquad \text{(20 bodů)}$$

Příklad 3: Spočtěte integrál:

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{(2 + \sin t)(1 + \cos^2 t)}\, \mathrm{d}t \qquad \text{(20 bodů)}$$

Písemná zkouška z Úvodu do komplexní analýzy (C)
ZS 2007-2008
Výsledky a návod k řešení

Příklad 1: Výsledek:



Postup a orientační bodové hodnocení:

1) Načrtneme $\langle\psi\rangle$, což je část jisté spirály začínající v bodě $i\frac{\pi}{2}$, končící v bodě 6π. (3 body)

2) Doplníme úsečkami. (2 body)

3) V obrázku vyznačíme orientaci křivky a určíme index – v neomezené komponentě je roven 0 (1 bod), v ostatních komponentách ho určíme dle „propichovací věty“ (4 body).

Příklad 2: Výsledek: $-\frac{\pi}{10}(2+e^{-\pi})$.

Postup a orientační bodové hodnocení:
1) Integrál konverguje (dokonce absolutně): Integrovaná funkce je spojitá na $[0,+\infty)\setminus\{\frac{1}{2}\}$, v bodě $\frac{1}{2}$ má vlastní limitu, v okolí $+\infty$ lze použít srovnávací kritérium. (1 bod)
2) Integrovaná funkce je sudá, integrál je roven polovině integrálu přes $\mathbb{R}$. (1 bod)
3) Položme $g(z) = \frac{e^{i\pi z}}{4z^4+3z^2-1}$. Pak g je holomorfní na $\mathbb{C}\setminus\{-\frac{1}{2},\frac{1}{2},i,-i\}$. Všechny póly jsou násobnosti 1. (3 body)
4) Uvažme křivku $\varphi_{r,R} = \psi_R \dot{+} [-R,-\frac{1}{2}-r] \dot{+} (\dot{-}\,\eta_{1,r}) \dot{+} [-\frac{1}{2}+r,\frac{1}{2}-r] \dot{+} (\dot{-}\,\eta_{2,r}) \dot{+} [\frac{1}{2}+r,R]$, kde $r\in(0,\frac{1}{2})$, $R>1$, $\psi_R(t)=Re^{it}$, $t\in[0,\pi]$, $\eta_{1,r}(t) = -\frac{1}{2}+re^{it}$, $t\in[0,\pi]$, $\eta_{2,r}(t)=\frac{1}{2}+re^{it}$, $t\in[0,\pi]$. (2 body)
5) Podle reziduové věty spočteme $\int_{\varphi_{R,r}} g$: Z pólů určených v bodě 3) je „uvnitř“jen bod i (v něm je index 1, v ostatních je index 0), reziduum v bodě i je $i\frac{e^{-\pi}}{10}$. Integrál je tedy roven $-\frac{\pi e^{-\pi}}{5}$. (3 body)
6) Provedeme limitní přechod pro $R\to\infty$ a $r\to 0+$:
(i) $\int_{\psi_R} g \to 0$ pro $R\to\infty$ podle Jordanova lemmatu. (2 body)
(ii) $\lim_{r\to 0+}\int_{\eta_{1,r}} g = \pi i \operatorname{res}_{-\frac{1}{2}} g$ podle jistého lemmatu (g má v $-\frac{1}{2}$ pól násobnosti 1). Reziduum je rovno $\frac{i}{5}$, limita je tedy $-\frac{\pi}{5}$. (2 body)
(iii) Podobně pro $\eta_{2,r}$: reziduum v $\frac{1}{2}$ je též $\frac{i}{5}$, příslušná limita rovněž $-\frac{\pi}{5}$. (2 body)
(iv) Reálná část integrálu přes tři úsečky z definice $\varphi_{r,R}$ má limitu (pro $R\to\infty$ a $r\to 0+$) $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos\pi x}{4x^4+3x^2-1}\,dx$. (2 body)
7) Kombinací předchozího – výsledků z bodu 5) a 6) a bodu 2) dostaneme výsledek. (2 body)

Příklad 3: Výsledek: $\pi(\sqrt{2}-\frac{1}{\sqrt{3}})$.

Postup a orientační bodové hodnocení:
1) Nechť φ je kladně orientovaná kružnice o středu 0 a poloměru 1. Pak integrál ze zadání je roven $\int_\varphi \frac{8z^2}{(z^2+4iz-1)(z^4+6z^2+1)}\,dz$. Ten spočítáme podle reziduové věty. (5 bodů)
2) Integrovaná funkce je funkce racionální, s póly v bodech $-i(2+\sqrt{3})$, $-i(2-\sqrt{3})$, $i\sqrt{3+\sqrt{8}}$, $-i\sqrt{3+\sqrt{8}}$, $i\sqrt{3-\sqrt{8}}$, $-i\sqrt{3-\sqrt{8}}$; všechny násobnosti 1. Přičemž body $-i(2+\sqrt{3})$, $i\sqrt{3+\sqrt{8}}$ a $-i\sqrt{3+\sqrt{8}}$ jsou mimo jednotkový kruh (index je v nich 0) a body $-i(2-\sqrt{3})$, $i\sqrt{3-\sqrt{8}}$ a $-i\sqrt{3-\sqrt{8}}$ jsou uvnitř jednotkového kruhu (index je v nich 1). [Poznámka: $\sqrt{3-\sqrt{8}} = 1-\sqrt{2}$, což ale pro výpočet potřeba není.] (5 bodů)
3) Spočteme rezidua:
(i) Reziduum v bodě $-i(2-\sqrt{3})$ je $-\frac{1}{2i\sqrt{3}}$. (2 body)
(ii) Reziduum v bodě $i\sqrt{3-\sqrt{8}}$ je $-\frac{1}{4}i(\sqrt{2}-1)$ (2,5 bodu)
(iii) Reziduum v bodě $-i\sqrt{3-\sqrt{8}}$ je $-\frac{1}{4}i(\sqrt{2}+1)$ (2,5 bodu)
5) Aplikací reziduové věty dostaneme výsledek. (3 body)