

Úvod do teorie grup: Cvičení 7

8. listopadu 2021

1. Popište všechny Sylowovy podgrupy grupy a) S_3 , b) $\mathbb{Z}_{20} \times \mathbb{Z}_{15}$.
2. Buď G konečná grupa, p, q prvočísla a P_p, P_q Sylowovy p - a q -podgrupy G . Pak $P_p \cap P_q = 1$.
3. Dokažte, že každá grupa řádu 70 obsahuje normální Sylowovu 5-podgrupu.
4. Charakterizujte všechny grupy řádu a) 33, b) 35, c) 99, d) 21, e) 55.

Další příklady:

5. Ať $|G| = p_1^{k_1} \cdots p_n^{k_n}$ a P_{p_i} je nějaká Sylowova p_i -podgrupa. Pak G je generovaná $\bigcup_i P_{p_i}$.
6. Popište všechny Sylowovy podgrupy grupy $S_3 \times S_3$ a D_{12} .
7. Ukažte, že žádná grupa řádu 200 není jednoduchá.
8. Buď G jednoduchá grupa splňující $|G| = 168$. Ukažte, že obsahuje právě 48 prvků řádu 7.
9. Ukažte, že grupa řádu 105 obsahuje normální Sylowovu 5-podgrupu nebo normální Sylowovu 7-podgrupu.
10. Popište až na izomorfismus všechny grupy řádu 105. Pro každou určete, které její Sylowovy podgrupy jsou normální.
11. Dokažte, že žádná grupa řádu 12 není jednoduchá. Dokažte to i pro řád 56.
12. Dokažte, že pro prvočísla $p > q$ grupa řádu pq obsahuje normální podgrupu řádu p .

Tabulka konečných grup (věta 2.18)

n	grupy řádu n
1	\mathbb{Z}_1
2	\mathbb{Z}_2
3	\mathbb{Z}_3
4	$\mathbb{Z}_4, \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$
5	\mathbb{Z}_5
6	$\mathbb{Z}_6, S_3 = D_6$
7	\mathbb{Z}_7
8	$\mathbb{Z}_8, \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4, \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, D_8, Q_8$
p	\mathbb{Z}_p
p^2	$\mathbb{Z}_{p^2}, \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$
$2p$	\mathbb{Z}_{2p}, D_{2p}
12	$\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3, A_4, D_{12}, X$
15	$\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5$

Hinty:

Obecně: Pokud se úloha ptá na charakterizaci/jednoduchost grup, zkuste dokázat normálnost jedné či více Sylowových p -podgrup (typicky tím, že existuje právě 1). Pak použijte vnitřní (semi)direktní součin.

2. Uvažte řády prvků.

5. Zdola odhadněte řád grupy generované sjednocením. V jak velké mocnině ho musí dělit p_i ?

8. Jaký je průnik dvou různých Sylowových 7-podgrup?

9. Odhadněte počet prvků grupy pomocí počtu Sylowových 7-podgrup a 5-podgrup.

11. Kolik je Sylowových 3-podgrup (resp. 7-)? Kolik prvků je dohromady tvoří?